تهیه و انتشار:

امین یارمحمدی (مدرس ریاضیات دانشگاهی)

شماره تماس جهت هماهنگی برای کلاس خصوصی: ۰۹۱۲ ۳۸ ۷۲۸ ۳۴

انتگرال‌های ناسره (غیرعادی یا توسعی):

انتگرال‌ها در دو حالت ناسره می‌شوند:

الف) حداقل یکی از حدود انتگرال به سمت بی‌نهایت میل کند. ($\int_a^{+\infty} f(x)dx$ یا $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ یا $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$)

ب) تابع داخل انتگرال در نقطه‌ای از بازه انتگرال‌گیری، تعریف نشده باشد. مثلاً ریشه مخرج بین دو کران بالا و پایین انتگرال باشد مانند: $\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ یا مثلاً یکی از کران‌های انتگرال صفر باشد و انتگرال شامل لگاریتم باشد. مانند: $\int_0^1 \frac{dx}{x.Lnx}$

حالت الف) در این حالت ابتدا به جای کران‌های بی‌نهایت از حد یک پارامتر استفاده می‌کنیم. مثلاً:

$$\int_{-\infty}^{2} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{2} f(x)dx$$

$$\int_{5}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{5}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{7} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{7}^{b} f(x)dx$$

توجه: در مثال سوم بالا که هر دو کران انتگرال بی‌نهایت هستند، هر عددی در بازه $(-\infty,+\infty)$ قابل قبول است که ما به عنوان مثال عدد 7 را گذاشته‌ایم.

سپس حاصل انتگرال را محاسبه کرده و با یافتن حد آن در مثبت یا منفی بی‌نهایت، جواب انتگرال را می‌یابیم.

مثال: حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x^2+4}$$

حل:

$$\int_{-\infty}^{2}\frac{dx}{x^2+4}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^2\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg|_a^2=\frac{1}{2}\text{Arctan}(1)-\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\text{Arctan}\left(\frac{a}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{8}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{8}$$

مثال: حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{xLn^2x}$$

حل:

$$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{xLn^2x}=\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{dx}{xLn^2x}\underset{dt=\frac{dx}{x}}{\overset{t=Lnx}{=}}\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dt}{t^2}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b t^{-2}dt=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{t^{-1}}{-1}\Bigg|_1^b\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right)$$

$$=-\frac{1}{\infty}+1=0+1=1$$

توجه: در انتگرال بالا هنگام تغییر متغیر، کران‌های انتگرال نیز با توجه به تغییر متغیر اعمال شده به انتگرال ناسره از $(e,+\infty)$ به $(1,+\infty)$ تغییر کردند.

مثال: حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$$

حل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{-2}\frac{dx}{x^2+4x+5}+\lim_{b\to+\infty}\int_{-2}^{b}\frac{dx}{x^2+4x+5}=$$

$$\lim_{a\to-\infty}\operatorname{Arctan}(x+2)\Big|_a^{-2}+\lim_{b\to+\infty}\operatorname{Arctan}(x+2)\Big|_{-2}^{b}=$$

$$=\left(0-(-\frac{\pi}{2})\right)+\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\pi$$

نکته۱: برای محاسبه انتگرال تابع $\frac{1}{x^2+4x+5}$ ، آموزش انتگرال‌گیری به روش تجزیه کسر را مطالعه کنید.

نکته۲: همانطور که قبلاً توضیح دادیم زمانی که هر دو کران انتگرال بی‌نهایت هستند، هر عددی در بازه $(-\infty,+\infty)$ قابل قبول است که ما در این مثال عدد -2 را گذاشته‌ایم زیرا محاسبه آن در جواب انتگرال بالا ساده‌تر است ($\operatorname{Arctan}(0)=0$).

تمرین حالت الف: حاصل انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

1. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{2dx}{x^2}$
2. $\int_{1}^{+\infty} e^{-2x}dx$
3. $\int_{-\infty}^{2} \frac{3dx}{x^2+1}$
4. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{3-4x}$

ب) تابع زیر انتگرال در نقطه‌ای از بازه انتگرال‌گیری، تعریف نشده باشد. در این حالت در نقاطی که تابع زیر انتگرال بی‌نهایت (تعریف نشده) باشند را مشابه حالت الف به پارامتر تبدیل کرده و با حد به آن‌ها نزدیک می‌شویم. دقت کنید که حد حتماً باید یک‌طرفه (یا حد راست یا حد چپ) باشد و از سمت کران دیگر انتگرال به آن عدد نزدیک شود (در مثال‌های زیر می‌توانید این موضوع را ببینید). سپس با محاسبه انتگرال و استفاده از حد، جواب را می‌یابیم.

مثال: حاصل انتگرال $\int_{5}^{8} \frac{2dx}{\sqrt[3]{x-5}}$ را بیابید.

حل: تابع در ابتدای بازه تعریف نشده است پس ابتدای بازه را پارامتری می‌نویسیم و حد را به سمت 5^+ میل می‌دهیم (از سمتی که به 8 نزدیکتر است).

$$\int_5^8 \frac{2dx}{\sqrt[3]{x-5}} = \lim_{a\to 5^+}\int_a^8 \frac{2dx}{\sqrt[3]{x-5}} = \lim_{a\to 5^+}\int_a^8 \frac{2dx}{(x-5)^{\frac{1}{3}}} =$$

$$\lim_{a\to 5^+}\int_a^8 2(x-5)^{-\frac{1}{3}}dx = \lim_{a\to 5^+} 2\left.\frac{(x-5)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right|_a^8 = 3\left(3^{\frac{2}{3}} - 0^{\frac{2}{3}}\right) = 3^{\frac{5}{3}}$$

مثال: حاصل انتگرال $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{dx}{\sin x}$ را بیابید.

حل: تابع در انتهای بازه تعریف نشده است پس انتهای بازه را پارامتری می‌نویسیم و حد را به سمت 0^- میل می‌دهیم (از سمتی که به $-\frac{\pi}{2}$ نزدیکتر است).

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{dx}{\sin x} = \lim_{b\to 0^-}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{b}\frac{dx}{\sin x} = \lim_{b\to 0^-}\left.\left(-Ln\left|\csc x + \cot x\right|\right)\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{b} = \infty$$

با توجه به اینکه جواب انتگرال بی‌نهایت شد، نتیجه می‌گیریم این انتگرال واگراست.

مثال: حاصل انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ را محاسبه کنید.

حل: تابع در انتهای بازه تعریف نشده است پس انتهای بازه را پارامتری می‌نویسیم و حد را به سمت 1^- میل می‌دهیم (از سمتی که به 0 نزدیکتر است).

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\lim_{b\to 1^-}\left(\sqrt{1-x}\,\Big|_0^b\right) = 2$$

نکته: اگر نقطه مورد نظر در ابتدا یا انتها نباشد بهتر است فقط از یک پارامتر (مثلاً a) استفاده کنیم. در مثال زیر این نکته استفاده شده است.

مثال: حاصل انتگرال $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ را بیابید.

حل: تابع در وسط بازه یعنی $x=0$ تعریف نشده است پس انتگرال را به صورت حاصل جمع دو انتگرال نوشته و این نقطه را پارامتری نوشته و با حد به ترتیب از چپ و راست به آن نزدیک می‌شویم.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^{2}}=\lim_{a\to 0^{+}}\left(\int_{-1}^{-a}\frac{dx}{x^{2}}+\int_{a}^{1}\frac{dx}{x^{2}}\right)=$$

$$\lim_{a\to 0^{+}}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{a}\right)+\lim_{a\to 0^{+}}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{a}^{1}\right)=$$

$$\lim_{a\to 0^{+}}\left(-\frac{1}{a}\right)-1-1+\lim_{a\to 0^{+}}\left(-\frac{1}{a}\right)=\infty$$

تمرین حالت ب: حاصل انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

1. $\int_{0}^{9}\frac{dx}{\sqrt{x}}$
2. $\int_{0}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^{2}}}$
3. $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^{2}-1}}$
4. $\int_{0}^{5}\frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$