

## جبر اعداد مختلط:

برای جمع و تفریق اعداد مختلط کفایت قسمتهای حقیقی و موهومی جداگانه با هم جمع و تفریق شوند:

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

مثلا:

$$z_1 = 3 + 7i$$

$$z_2 = 1 + 3i$$

$$z_1 + z_2 = 4 + 10i$$

$$z_1 - z_2 = 2 + 4i$$

برای ضرب کردن اعداد مختلط باید تمام قسمتها در همدیگر ضرب شوند:

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1) \times (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

توجه کنید که:  $i \times i = i^2 = -1$

مثلا:

$$z_1 = 2 + 3i$$

$$z_2 = 5 + 7i$$

$$z_1 \times z_2 = (2 + 3i) \times (5 + 7i) = 10 + 14i + 15i + 21i^2 = -11 + 29i$$

نکته: حاصلضرب هر عدد در مزدوج خودش برابر است با یک عدد حقیقی که مجموع مزدورات دو قسمت حقیقی و موهومی آن عدد مختلط است. یعنی:

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$z \times \bar{z} = (x + iy) \times (x - iy) = x^2 - ixy + iyx - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$z \bar{z} = |z|^2 \quad \text{نکته:}$$

مثلا:

$$z = 3 + 5i$$

$$\bar{z} = 3 - 5i$$

$$z \times \bar{z} = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$$

این خاصیت در هر جایی که ما نیاز به تبدیل عدد مختلط به عدد حقیقی را داریم به درد می خورد. مثلا برای تقسیم دو عدد مختلط کافیسست صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب کنیم تا مخرج تبدیل به یک عدد حقیقی شده و جواب کسر بدست آید:

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(-x_1 y_2 + y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \left( \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + i \left( \frac{-x_1 y_2 + y_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

به طور مثال:

$$z_1 = 4 - 2i$$

$$z_2 = 3 + 4i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-2i}{3+4i} = \frac{4-2i}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{12-16i-6i+8i^2}{3^2+4^2} = \frac{4}{25} - \frac{22}{25}i$$

تمرین: اعداد زیر را دو به دو با هم جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کنید

$$1. \quad z_1 = -2 - i, z_2 = \sqrt{2} - 2i$$

$$2. \quad z_1 = 3 + 2i, z_2 = 4 + 2\sqrt{2}i$$

$$3. \quad z_1 = 1 - 2i, z_2 = 3 + 2i$$