

حد و تعریف آن:

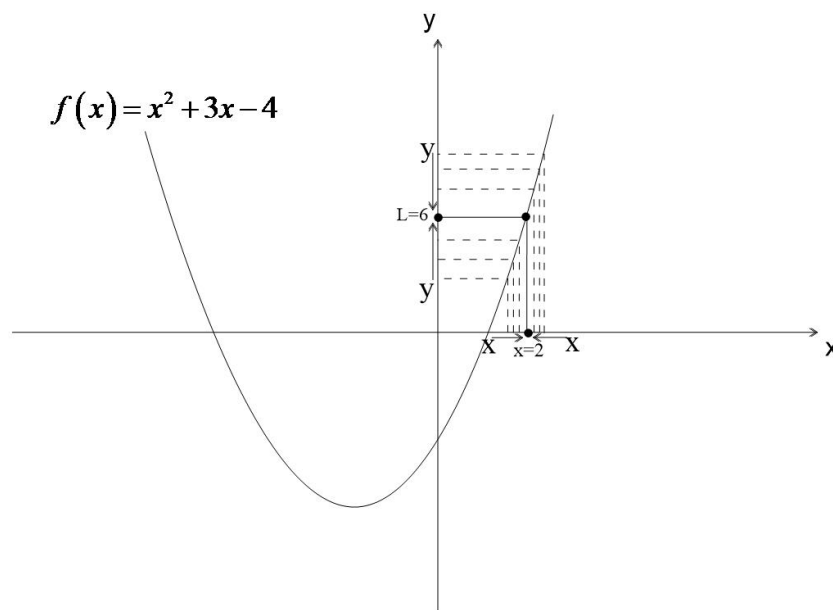
ما وقتی بخواهیم مقدار یک تابع در یک نقطه را پیدا کنیم کافیست آن عدد را به جای x در تابع قرار بدهیم. مثلاً:

$$f(x) = x^2 + 3x - 4 \Rightarrow f(2) = 2^2 + 3 \times 2 - 4 = 6$$

ولی برای محاسبه حد در یک نقطه، باید اعداد نزدیک به آن عدد را در تابع قرار دهیم تا ببینیم جوابها نزدیک چه عددی است. مثلاً برای مثال بالا داریم:

$$f(x) = x^2 + 3x - 4 \Rightarrow f(2.001) = 2.001^2 + 3 \times 2.001 - 4 = 6.007001$$

ملاحظه می‌کنید که جواب نزدیک ۶ شد پس حد تابع در $x=2$ برابر است با ۶. یعنی اگر x از چپ و راست به سمت ۲ نزدیک شود، y از بالا یا پایین به ۶ نزدیک می‌شود. در شکل زیر این موضوع نشان داده شده است:



حد یک تابع در نقطه $x=x_0$ را با نماد زیر نمایش می‌دهند:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

مثلا برای تابع بالا می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3x - 4 = 6$$

اصولا در امتحانات ریاضی عمومی اجازه استفاده از ماشین حساب نداریم پس باید از روش‌های دیگری برای محاسبه حد استفاده کنیم.

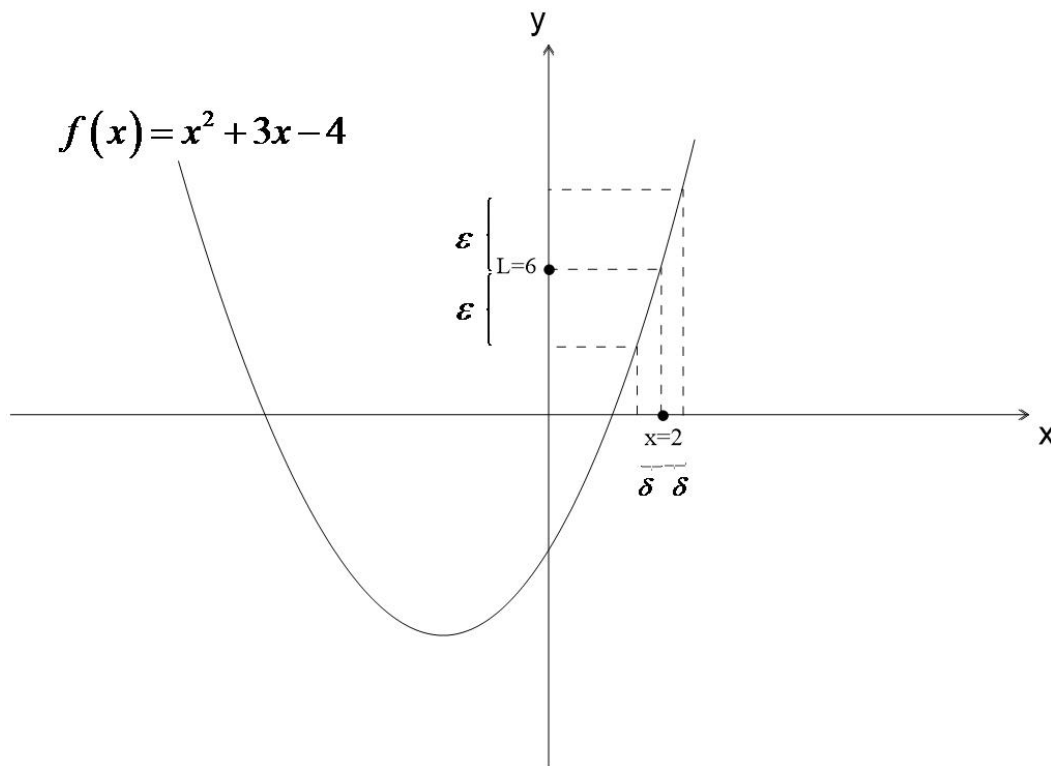
کلا تعریف حد به صورت زیر است:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

یعنی به ازای هر ε (اپسیلون) مثبت خیلی کوچک، یک δ (دلتا) مثبت وجود دارد که اگر فاصله x از a کمتر از δ باشد (در مثال بالا $\delta=0.001$) آنگاه فاصله $f(x)$ از حد تابع کمتر از ε شود (در مثال بالا $\varepsilon=0.007001$)

حد و تعریف آن

شکل زیر این موضوع را به صورت هندسی نمایش می‌دهد:



اگر محاسبه حد را به کمک تعریف حد بخواهند باید با تشکیل $|f(x) - L| < \varepsilon$ سعی کنیم به $|x - a| < \delta$ برسیم و رابطه‌ای بین ε و δ بیابیم.

مثال: به کمک تعریف حد ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

حل: باید از $|f(x) - L| < \varepsilon$ (در این سوال $|x^2 - 4| < \varepsilon$) به $|x - a| < \delta$ (در این سوال $|x - 2| < \delta$) برسیم:

$$|x^2 - 4| < \varepsilon \Rightarrow |(x-2)(x+2)| < \varepsilon \Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{|x+2|} \xrightarrow{x \rightarrow 2} |x-2| < \frac{\varepsilon}{4}$$

حال که به $|x-2| < \frac{\varepsilon}{4}$ رسیدیم، با مقایسه با $|x-2| < \delta$ به این نتیجه می‌رسیم که $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$

تمرین: به کمک تعریف حد، ثابت کنید:

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} x + 2 = 6$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} x^3 - 4 = -3$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 4}{x + 1} = -4$$