خواص اعداد مختلط:

خواص زیر برای اعداد مختلط برقرار است

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$
$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$
$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

مثال: حاصل $\left|\frac{\bar{z}}{iz}\right|$ را بیابید.

حل: مطابق خواص بالا داریم:

$$\left|\frac{\bar{z}}{iz}\right| = \frac{|\bar{z}|}{|iz|} = \frac{|\bar{z}|}{|i||z|} = \frac{\sqrt{x^2+(-y)^2}}{1\times\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$$

نکته: $|i| = 1$ زیرا :

$$i = 0 + 1i \Rightarrow |i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$$

مثال: حاصل عبارت $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ را بیابید.

حل: ابتدا باید هر کدام از اعداد داخل پرانتزها را به فرم قطبی بنویسیم

$$z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\Rightarrow\begin{cases}|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1\\ \theta=\text{Arctan}(-1)=-\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow z=re^{i\theta}=e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

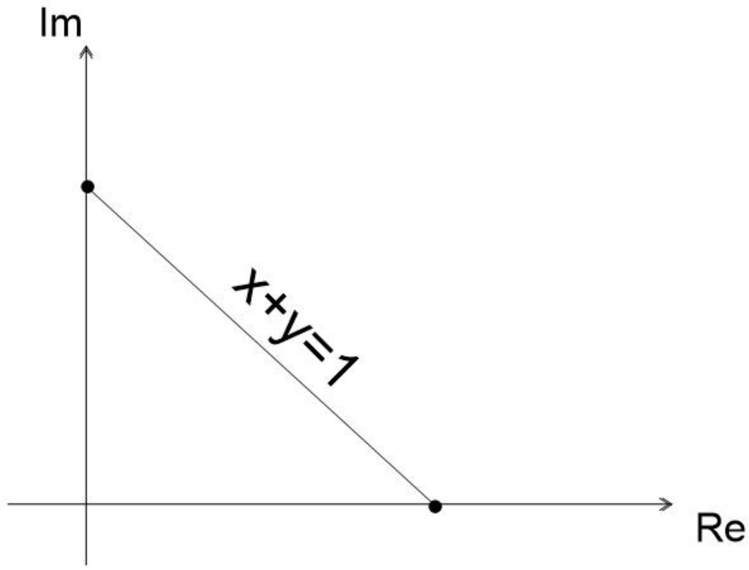
$$z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\Rightarrow\begin{cases}|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1\\ \theta=\text{Arctan}(1)=\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow z=re^{i\theta}=e^{\frac{\pi i}{4}}$$

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n=\left(e^{-\frac{\pi i}{4}}\right)^n+\left(e^{\frac{\pi i}{4}}\right)^n=e^{-\frac{n\pi i}{4}}+e^{\frac{n\pi i}{4}}$$
$$=\cos(-\frac{n\pi}{4})+i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)+\cos(\frac{n\pi}{4})+i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$
$$=\cos(\frac{n\pi}{4})-i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)+\cos(\frac{n\pi}{4})+i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$
$$=2\cos(\frac{n\pi}{4})$$

تمرین: حاصل عبارت $\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n-\left(1-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n$ را بیابید.

مثال: منحنی $z=\cos^2 t+i\sin^2 t$ را رسم کنید.

حل: از $z=x+iy$ میتوان گفت $x=\cos^2 t$ و $y=\sin^2 t$ پس با توجه به $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ میتوان گفت $x+y=1$ ولی باید توجه داشت که $\cos^2 t\geq 0$ و $\sin^2 t\geq 0$ پس $x\geq 0$ و $y\geq 0$ یعنی بخشی از خط $x+y=1$ که در ربع اول قرار دارد مورد نظر است:



مثال: اگر $z=(1+i)\left(1+i\sqrt{2}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)...\left(1+i\sqrt{n}\right)$ حاصل $|z|^2$ را بیابید.

حل: به یاد داریم $|z|^2=z\bar{z}$ پس عدد مختلط داده شده را در مزدوجش ضرب میکنیم تا به جواب مورد نظر برسیم:

$$|z|^2=z\bar{z}=(1+i)\left(1+i\sqrt{2}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)...\left(1+i\sqrt{n}\right)\times(1-i)\left(1-i\sqrt{2}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)...\left(1-i\sqrt{n}\right)$$

$$=\left(1-i^2\right)\left(1-\left(i\sqrt{2}\right)^2\right)\left(1-\left(i\sqrt{3}\right)^2\right)...\left(1-\left(i\sqrt{n}\right)^2\right)=2\times3\times4\times...\times(n+1)=(n+1)!$$

$$\Rightarrow |z|^2=(n+1)!$$