تهیه و انتشار:

امین یارمحمدی (مدرس ریاضیات دانشگاهی)

شماره تماس جهت هماهنگی برای کلاس خصوصی: ۰۹۱۲ ۳۸ ۷۲۸ ۳۴

دنباله:

دنباله به زبان ساده «لیست اعداد نوشته شده به ترتیب خاص» است. هر چند ممکن است یک دنباله به تعداد متناهی عدد داشته باشد ولی ما در این درس (و کلاً در دروس ریاضیات دانشگاه) با توالی‌های نامتناهی سر و کار داریم. یعنی هر رشته عددی به صورت $a_1,a_2,a_3,...$ را دنباله گویند و با $\{a_n\}$ نمایش می‌دهند که n یک عدد طبیعی است.

توجه کنید که a_n یک نماد است یعنی مقدار nام دنباله a. پس a_{n+1} با a_n+1 برابر نیستند.

مثلاً:

$$a_n = n^2$$

$$a_4 = 4^2 = 16$$

$$a_5 = 5^2 = 25 \neq a_4 + 1$$

البته برای نمایش دنباله‌ها روش‌های مختلفی وجود دارد. به طور مثال:

$$\{a_n\}$$

یا

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

یا

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots\}$$

که a_n به صورت فرمول داده می‌شود. مثلاً: $a_n = n^3 - 4n$

البته برخی مواقع n از **1** شروع نمی‌شود که در این حالت باید عدد ابتدائی ذکر گردد.

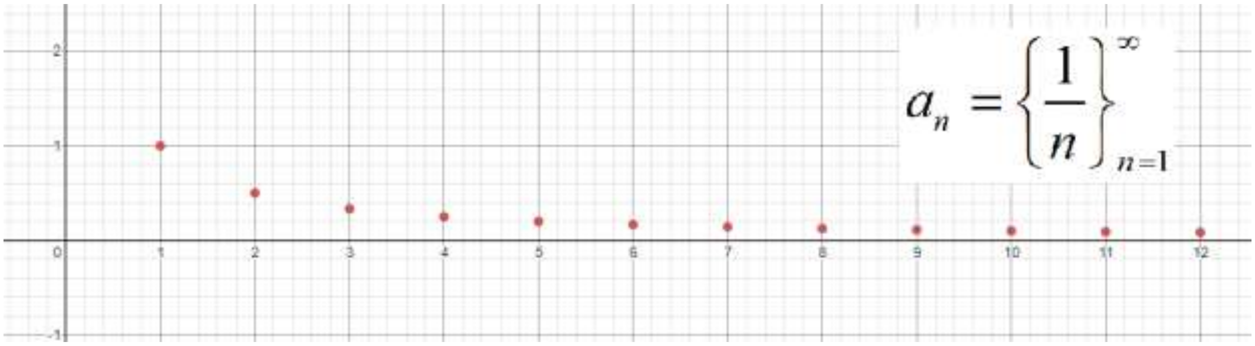
مثال:

$$\left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \ldots\right\}$$

$$\left\{\frac{n}{n-1}\right\}_{n=4}^{\infty} = \left\{\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots\right\}$$

نمایش دنباله‌ها بر روی نمودار: بر روی محور x، اعداد طبیعی و بر روی محور y، مقدار دنباله در آن عدد را نشان می‌دهیم و نقاط را می‌یابیم. یعنی نقاط به صورت زوج مرتب‌های

(n,a_n) نمایش داده می‌شوند. مثلاً دنباله $a_n=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:



و نقاطی که روی شکل نمایش داده می‌شوند از اعداد طبیعی و مقادیر متناظر نیز از روی دنباله پیدا می‌شوند:

$$n=1\Rightarrow a_1=\frac{1}{1}=1\rightarrow(1,1)$$

$$n=2\Rightarrow a_2=\frac{1}{2}\rightarrow\left(2,\frac{1}{2}\right)$$

$$n=3\Rightarrow a_3=\frac{1}{3}\rightarrow\left(3,\frac{1}{3}\right)$$

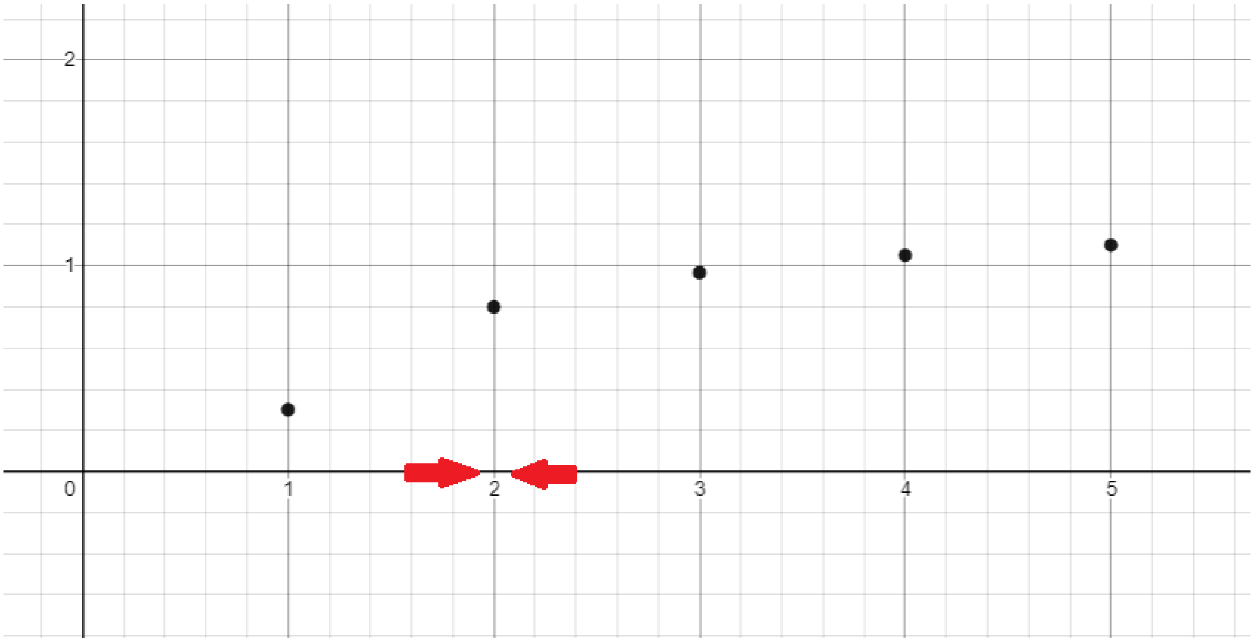
.

.

.

حد دنباله‌ها: مشخصاً در دنباله‌ها نمی‌توان حد در یک نقطه را محاسبه کرد زیرا نقاط به اندازه «یک واحد» با یکدیگر فاصله دارند و نمی‌توان به هیچ نقطه‌ای نزدیک شد.

به طور مثال:

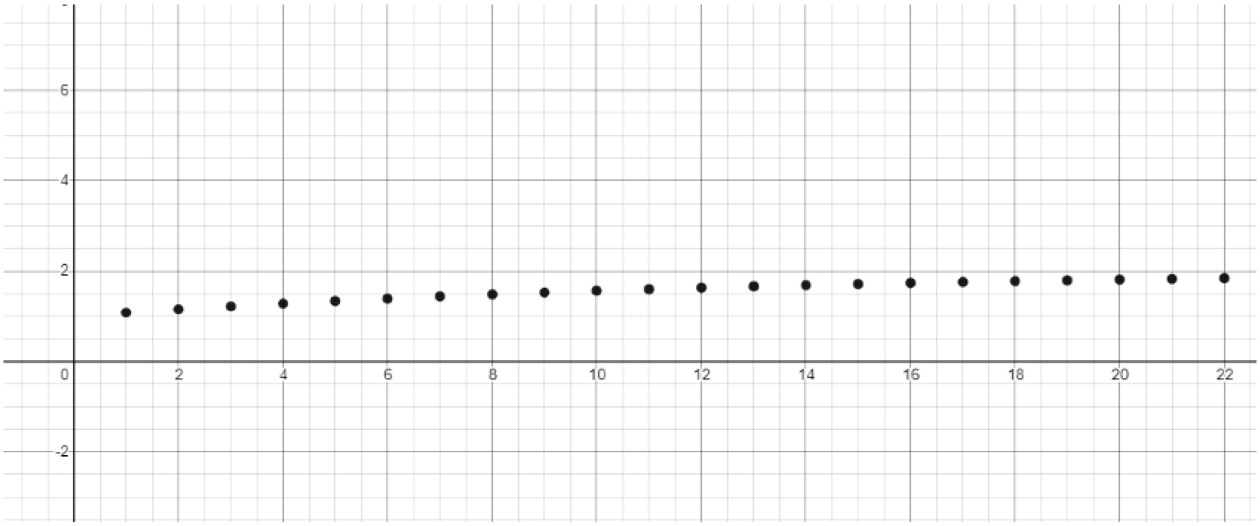


مشاهده می‌کنید که در دنباله شکل بالا، حد در نقطه $x=2$ معنی ندارد زیرا دنباله در نقاط نزدیک به این عدد تعریف نشده است.

همینطور حد در $-\infty$ نیز وجود ندارد زیرا دنباله از $n=1$ شروع می‌شود و تا $+\infty$ ادامه می‌یابد، پس دنباله فقط در $+\infty$ می‌تواند حد داشته باشد که با L نمایش داده می‌شود و به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$L=\lim_{n\to\infty} a_n$$

مثلاً در شکل زیر حد دنباله 2 است:



زیرا با افزایش مقادیر n ، مقادیر دنباله به عدد ۲ نزدیک‌تر می‌شوند. پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

محاسبه حد دنباله‌ها مشابه محاسبه حد توابع حقیقی است و اغلب از جایگذاری $+\infty$ به جای n می‌توان به جواب رسید ولی برخی مواقع نیز باید رفع ابهام انجام شود که مشابه رفع ابهام در محاسبه حد توابع حقیقی انجام می‌شود. یعنی اگر $f(x)$ تابع متناظر a_n باشد ($f(n)=a_n$) از $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ میتوان نتیجه گرفت $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

مثال: حد دنباله‌های زیر را بیابید.

$$1)\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

$$2)\left\{\frac{2n^2-3n}{-5n^2+8}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$3)\left\{\frac{-n^2+n}{n-1}\right\}_{n=2}^{\infty}$$

حل:

$$1)\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}=\frac{\pm1}{\infty}=0$$

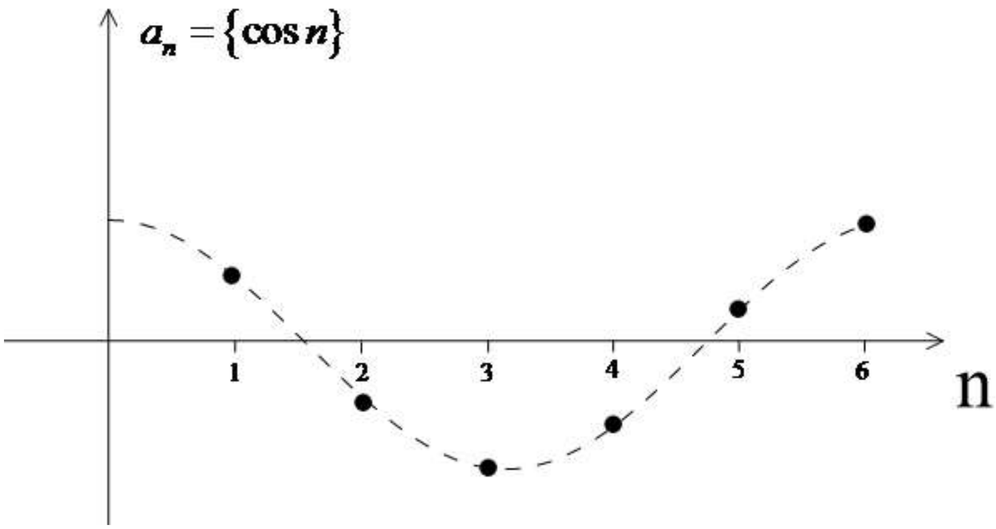
$$2)\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n}{-5n^2+8}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{-5n^2}=-\frac{2}{5}$$

$$3)\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+n}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}(-n)=-\infty$$

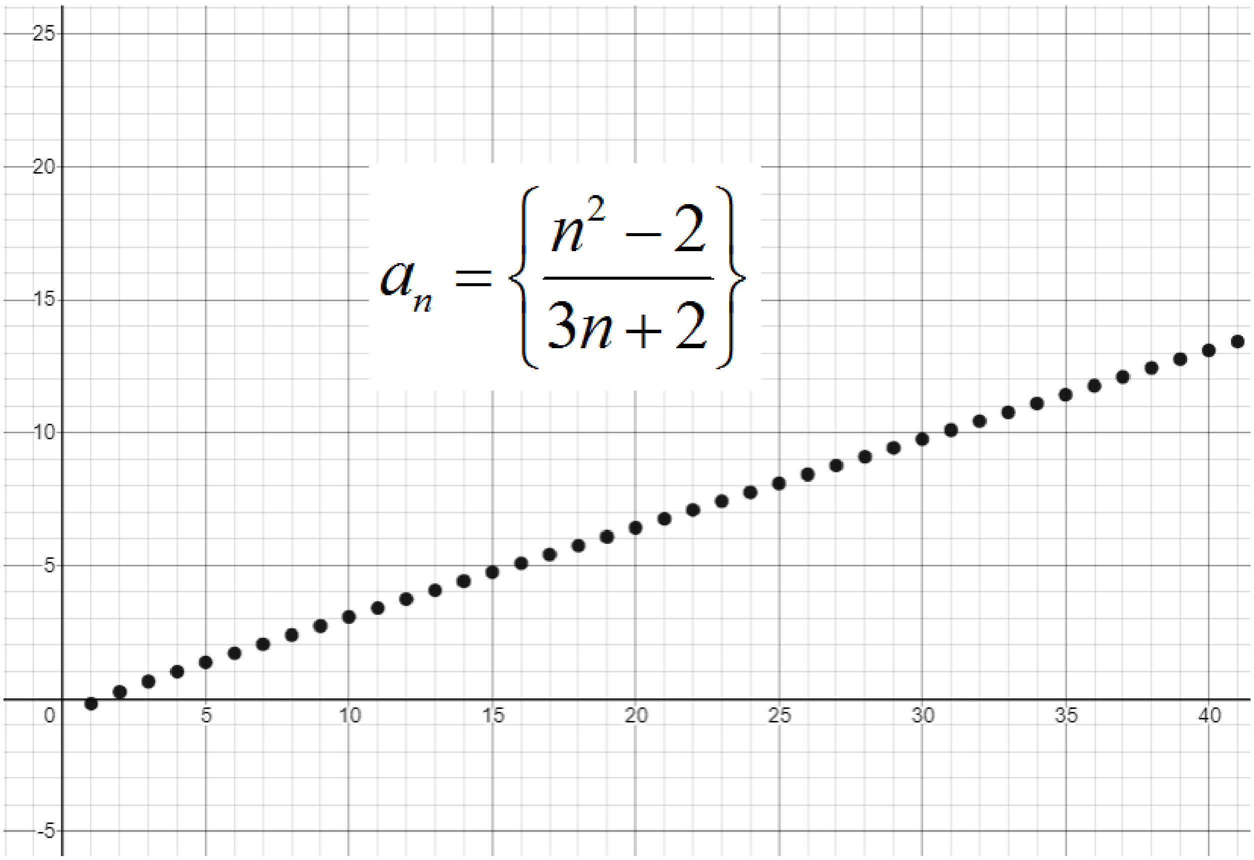
همچنین هرگاه دنباله‌ای حد داشته باشد گوییم آن دنباله همگرا است و اگر حد دنباله موجود نباشد، دنباله را واگرا گوییم. در مثال بالا دنباله 1 همگرا به صفر، دنباله 2 همگرا به $-\frac{2}{5}$ و دنباله 3 واگراست.

دنباله $a_n = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ که شکل آن رسم شد، همگرا به صفر است.

دنباله $a_n = \{\cos n\}$ واگراست زیرا در ∞ به هیچ عددی همگرا نیست و نوسانی تغییر می‌کند.



دنباله $a_n = \left\{ \frac{n^2 - 2}{3n + 2} \right\}$ واگراست زیرا وقتی $n \to \infty$ میل کند، دنباله به ∞ می‌رود. (شکل زیر)



تمرین: تعیین کنید دنباله‌های زیر همگرا هستند یا واگرا.

$$1)\left\{ \frac{2n^4 - 1}{-12n + 4n^4} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

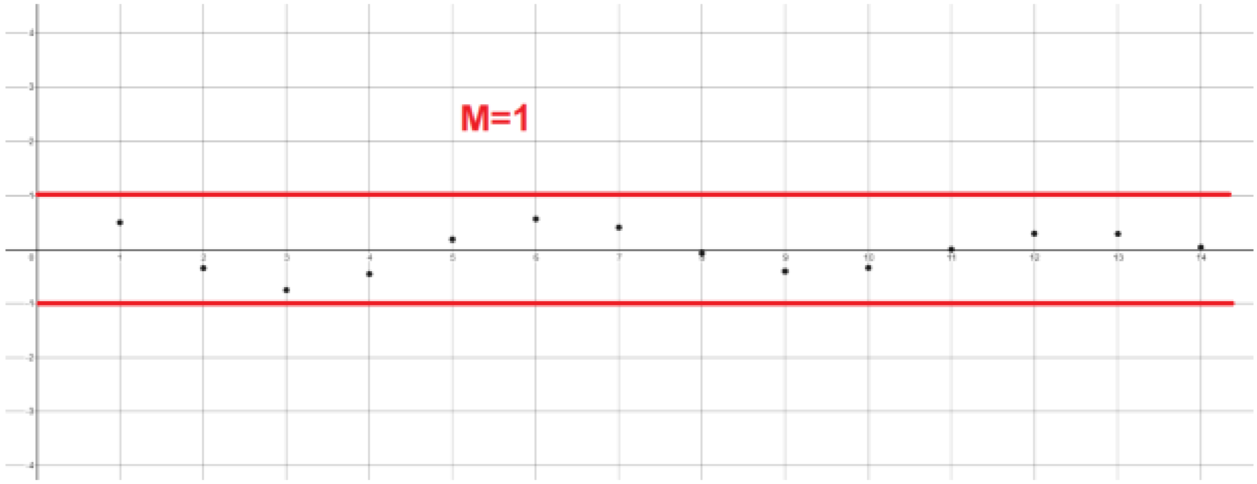
$$2)\left\{ \frac{e^{-3n}}{2n^2 - 7} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$3)\left\{ (-1)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$$

دنباله کراندار: دنباله $\{a_n\}$ را کراندار گوییم هرگاه عددی مانند M وجود داشته باشد به طوریکه که قدرمطلق تمام مقادیر دنباله از آن عدد کوچکتر باشند:

$\exists M \;,\; \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \le M$

یعنی تمام مقادیر دنباله بین M+ و M− باشند. (مانند شکل زیر)



در شکل بالا تمام مقادیر دنباله بین 1- و 1+ هستند پس این دنباله کراندار است.

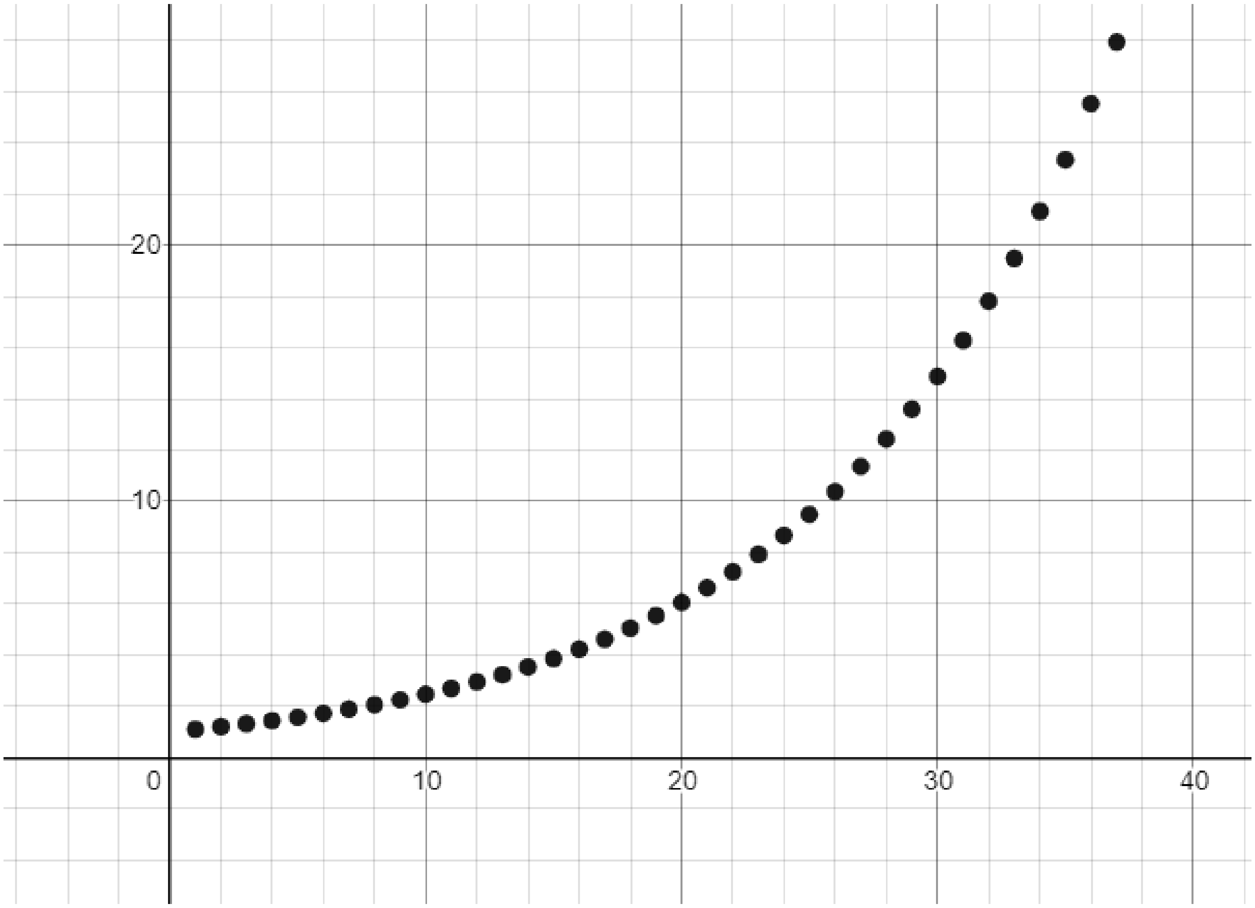
دنباله‌های $a_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ و $b_n = \{\cos n\}$ کراندار هستند زیرا قدرمطلق تمام مقادیر آنها کوچکتر یا مساوی ۱ است ولی دنباله $c_n = \left\{\frac{n^2-2}{3n+2}\right\}$ کراندار نیست زیرا مقادیر آن بی‌کران افزایش می‌یابد. (مطابق نمودار آن که بالاتر رسم شد)

دقت کنید که یک دنباله می‌تواند واگرا و کراندار باشد (مانند $\{\cos n\}$ که همگرا نیست پس واگراست اما کران دارد) ولی دنباله‌های بی‌کران حتما واگرا هستند.

دنباله‌های صعودی و نزولی: دنباله $\{a_n\}$ را اکیداً صعودی می‌نامیم هرگاه هر جمله آن بیشتر از مقدار جمله قبلی باشد:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} > a_n$$

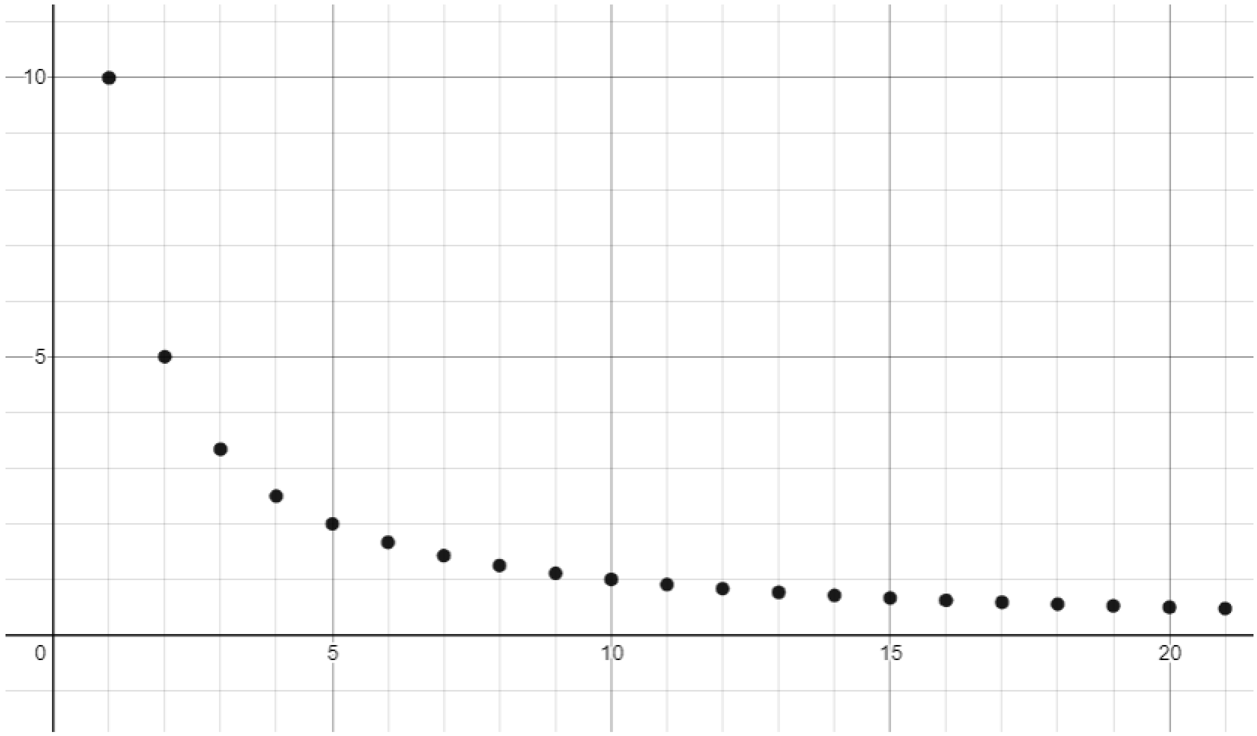
یعنی مقادیر دنباله در حال افزایش است و نمودار رو به بالاست. مانند:



و به همین ترتیب، دنباله $\{a_n\}$ را اکیداً نزولی گوییم هرگاه هر جمله آن کمتر از مقدار جمله قبلی باشد:

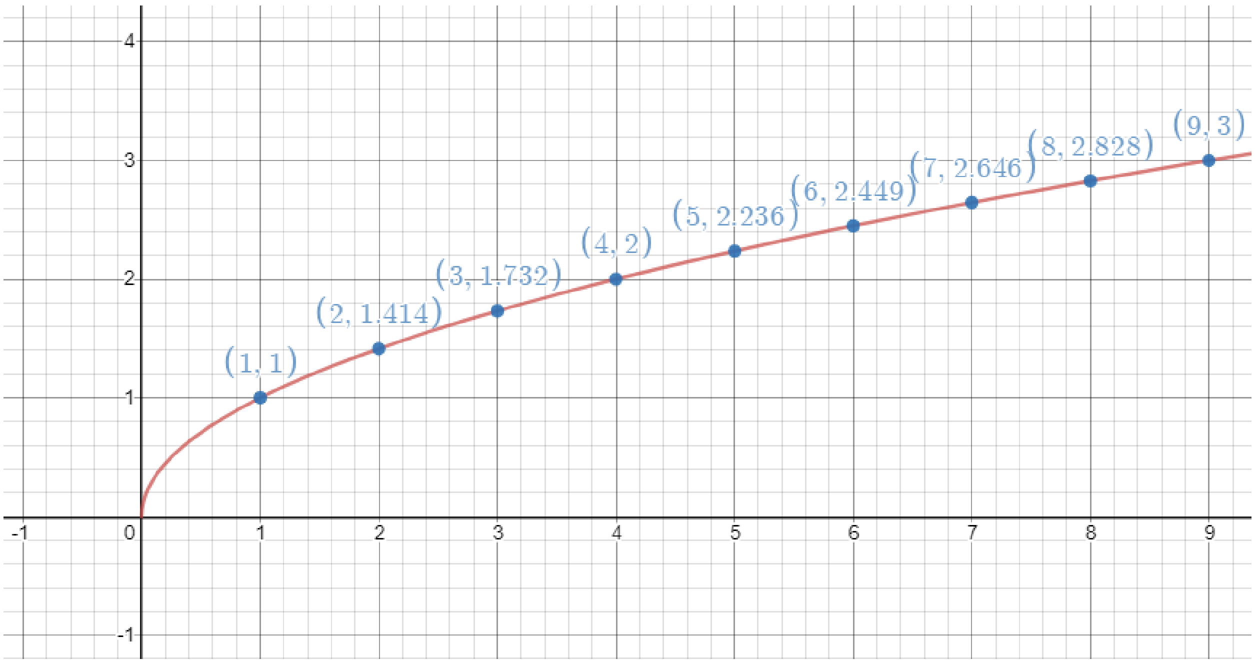
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} < a_n$$

یعنی مقادیر دنباله در حال کاهش است و نمودار رو به پایین است. مانند:



برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن دنباله می‌توانیم از دنباله مشتق بگیریم. هرگاه a_n' مثبت باشد آن دنباله صعودی و اگر منفی باشد دنباله نزولی است.

کاملاً واضح است که با توجه به غیرپیوسته بودن دنباله‌ها، مشتق دنباله موجود نیست ولی اعداد دنباله روی منحنی توابع حقیقی متناظر خود هستند. بطور مثال:



خط قرمزرنگ متعلق به تابع حقیقی $f(x)=\sqrt{x}$ و نقاط آبی‌رنگ مربوط به دنباله $a_n=\sqrt{n}$ است که بر روی تابع قرار دارد.

$$a_n=\sqrt{n} \Rightarrow a_n'=\frac{1}{2\sqrt{n}}>0$$

که از روی مشتق دنباله نیز می‌توان به صعودی بودن دنباله پی برد.

پس رفتار دنباله از لحاظ صعودی یا نزولی، مشابه رفتار تابع حقیقی متناظر است که با تبدیل n به x به دست می‌آید. در نتیجه کافیست از دنباله مشتق بگیریم تا وضعیت صعودی یا نزولی بودن آن مشخص شود.

نکته: دنباله‌ای که صعودی یا نزولی باشد را یکنوا گوییم.

قضیه: هر دنباله یکنوا و کراندار، همگراست.