

روش‌های محاسبه حد:

الف- اتحادها: در محاسبه برخی از حدها، به کمک اتحادها و ساده کردن صورت و مخرج می‌توان به جواب مورد نظر رسید.

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ را بیابید.

حل: اگر $x = -3$ را در تابع جایگذاری کنیم به حالت $\frac{0}{0}$ می‌رسیم که حالتی مبهم است ولی به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = -6$$

تمرین: حاصل حدود زیر را محاسبه کنید.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + x - 2}$$

در محاسبه حدهایی که شامل عبارات رادیکالی هستند معمولاً با ضرب کردن صورت و مخرج در مزدوج آن عبارت، جواب حد پیدا می‌شود.

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$ را بیابید.

حل: اگر $x=4$ را در تابع جایگذاری کنیم به حالت $\frac{0}{0}$ می‌رسیم که حالتی مبهم است ولی با ضرب کردن صورت و مخرج در مزدوج مخرج و همینطور به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{\sqrt{x} - 2} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x} + 2)}{x - 4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x+4)(\sqrt{x} + 2) = 8 \times 4 = 32$$

تمرین: حاصل حدود زیر را محاسبه کنید.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 + x - 2}$$

ب- هم‌ارزی‌ها: در محاسبه حدهای شامل توابع مثلثاتی، استفاده از هم‌ارزی‌های زیر توصیه می‌شود:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \sin u \sim \lim_{u \rightarrow 0} u$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \tan u \sim \lim_{u \rightarrow 0} u$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \sin^{-1} u \sim \lim_{u \rightarrow 0} \text{Arcsin } u \sim \lim_{u \rightarrow 0} u$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \tan^{-1} u \sim \lim_{u \rightarrow 0} \text{Arctan } u \sim \lim_{u \rightarrow 0} u$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \sinh u \sim \lim_{u \rightarrow 0} u$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \tanh u \sim \lim_{u \rightarrow 0} u$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \cos u \sim \lim_{u \rightarrow 0} 1 - \frac{u^2}{2} \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} 1 - \cos u \sim \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2}{2}$$

نکته: هم‌ارزی‌های فوق فقط زمانی معتبر هستند که جواب بدست آمده از آنها دوباره مبهم نشود، در غیر اینصورت باید از هم‌ارزی‌های زیر استفاده کنیم:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \sin u \sim \lim_{u \rightarrow 0} u - \frac{u^3}{6} \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} u - \sin u \sim \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^3}{6}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \tan u \sim \lim_{u \rightarrow 0} u + \frac{u^3}{3} \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \tan u - u \sim \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^3}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \tan u - \sin u \sim \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^3}{2}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \text{Arcsin } u - u \sim \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^3}{6}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} u - \text{Arctan } u \sim \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^3}{3}$$

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

حل:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x)^2}{x^2} = 1$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{1}{6}$

تمرین: حاصل حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\arctan 3x} \quad .1 \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arcsin } 3x - 3x}{\tan x - \sin x} \quad .2 \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{3x \sinh 2x} \quad .3 \end{aligned}$$