هر عدد مختلط n ریشـــه nام دارد. برخی از این ریشـــه ها ممکن اســـت اعداد حقیقی باشند ولی در حالت کلی مختلط در نظر می‌گیریم.

برای یافتن ریشه های هر عدد مختلط باید ابتدا آن را به صورت قطبی بنویسیم:

$z = re^{i\theta}$

سپس ریشه رادیکال را به صورت توانی می‌نویسیم:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\theta}} = (re^{i\theta})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}(e^{i\theta})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right]$$

می‌دانیم در اعداد مختلط، زوایا برحسب رادیان می‌باشند. پس با تغییر θ به $2k\pi+\theta$ در جواب $re^{i\theta}$ تغییری ایجاد نمی‌شود (یعنی $e^{i(2k\pi+\theta)} = e^{i\theta}$). ولی هنگامی که $re^{i\theta}$ به توان $\frac{1}{n}$ برسد جواب تغییر می‌کند. یعنی در $(e^{i\theta})^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{i\theta}{n}}$ اگر θ به $2k\pi+\theta$ تبدیل شود، به ازای kهای مختلف حاصل جواب $e^{\frac{i(2k\pi+\theta)}{n}}$ متفاوت خواهد بود. پس به ازای k از o تا $n-1$ جواب‌های متفاوتی (به تعداد n جواب مختلف) خواهیم داشت. ولی از $k=n$ به بعد، جواب‌های تکراری خواهیم داشت زیرا:

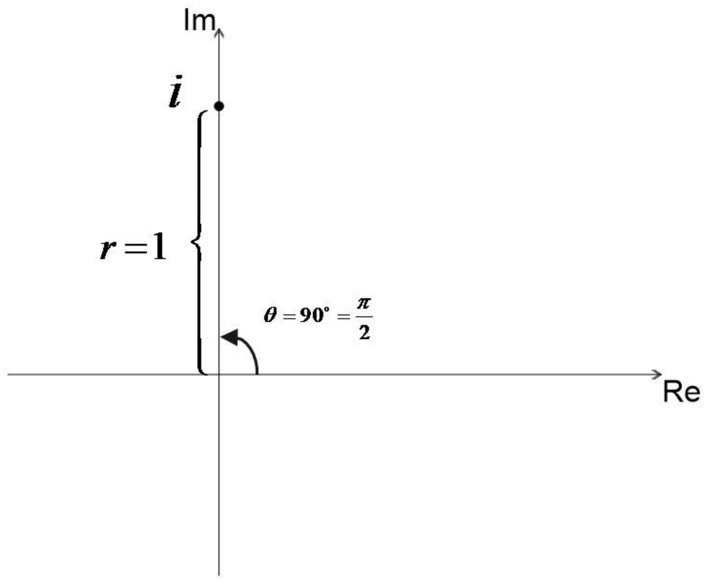
$$e^{\frac{i(2n\pi+\theta)}{n}} = e^{i(\frac{2n\pi}{n}+\frac{\theta}{n})} = e^{i(2\pi+\frac{\theta}{n})} = e^{i\frac{\theta}{n}}$$

پس از به دست آوردن n جواب مختلف در فرم قطبی، می‌توان آن‌ها را به فرم پارامتری $x+iy$ برگرداند.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right]$$

مثال: ریشه‌های چهارم $z=i$ را بیابید.

حل: ابتدا i را به صورت قطبی می‌نویسیم:



مشاهده می‌کنید که i در فاصله 1 از مبداء مختصات بوده و با محور x ها زاویه $\theta=90^\circ=\dfrac{\pi}{2}$ می‌سازد:

$$i=re^{i\theta}=1e^{i\frac{\pi}{2}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

سپس ریشه چهارم را به صورت توانی می‌نویسیم:

$$w=\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{i}=i^{\frac{1}{4}}=(e^{i\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{4}}$$

حال زاویه را با $2k\pi$ جمع می‌کنیم:

$$w=(e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)})^{\frac{1}{4}}=e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})}$$

به ازای k از o تا 3 تا به 4 جواب ممکن از ریشه چهارم $z=i$ می‌رسیم:

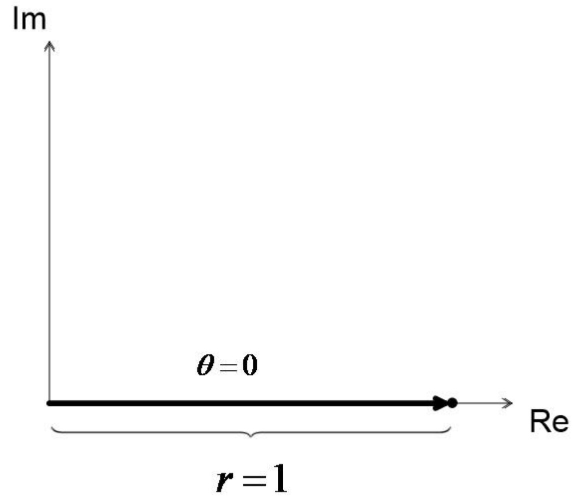
$$w=\begin{cases} k=0\Rightarrow w_0=e^{i\frac{\pi}{8}} \\ k=1\Rightarrow w_1=e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2})}=e^{i\frac{5\pi}{8}} \\ k=2\Rightarrow w_2=e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{2})}=e^{i\frac{9\pi}{8}} \\ k=3\Rightarrow w_3=e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2})}=e^{i\frac{13\pi}{8}} \end{cases}$$

سپس در صورت نیاز می‌توان جواب‌ها را به فرم پارامتری نوشت:

$$\begin{cases} w_0=e^{i\frac{\pi}{8}}=\cos(\frac{\pi}{8})+i\sin(\frac{\pi}{8}) \\ w_1=e^{i\frac{5\pi}{8}}=\cos(\frac{5\pi}{8})+i\sin(\frac{5\pi}{8}) \\ w_2=e^{i\frac{9\pi}{8}}=\cos(\frac{9\pi}{8})+i\sin(\frac{9\pi}{8}) \\ w_3=e^{i\frac{13\pi}{8}}=\cos(\frac{13\pi}{8})+i\sin(\frac{13\pi}{8}) \end{cases}$$

مثال: ریشه‌های سوم $z=1$ را بیابید.

حل: ابتدا مشابه مثال قبل، 1 را به صورت قطبی می‌نویسیم:



مشاهده می‌کنید که 1 در فاصله 1 از مبداء مختصات بوده و با محور x ها زاویه $\theta=0^\circ$ می‌سازد:

$$i=re^{i\theta}=1e^{i0}=e^{i0}$$

سپس ریشه سوم را به صورت توانی می‌نویسیم:

$$w=\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{1}=1^{\frac{1}{3}}=(e^{i0})^{\frac{1}{3}}$$

حال زاویه $\theta=0^\circ$ را با $2k\pi$ جمع می‌کنیم:

$$w=(e^{i(0+2k\pi)})^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{2k\pi i}{3}}$$

به ازای k از o تا 2 به 3 جواب ممکن از ریشه سوم $z=1$ می‌رسیم:

$$w=\begin{cases} k=0\Rightarrow w_0=e^0=1 \\ k=1\Rightarrow w_1=e^{\frac{2\pi i}{3}}=\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ k=2\Rightarrow w_2=e^{\frac{4\pi i}{3}}=\cos(\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{4\pi}{3})=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

تمرین:

۱. ریشه‌های دوم $z=-i$ را بیابید.

۲. ریشه‌های پنجم $z=1+i$ را بیابید.

۳. ریشه‌های سوم $z=-\sqrt{3}+i$ را بیابید.

۴. معادله $z^4=\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^3$ را حل کنید.

۵. معادله $\left(z^2+i\right)^2=1$ را حل کنید.