

فرم قطبی اعداد مختلط:

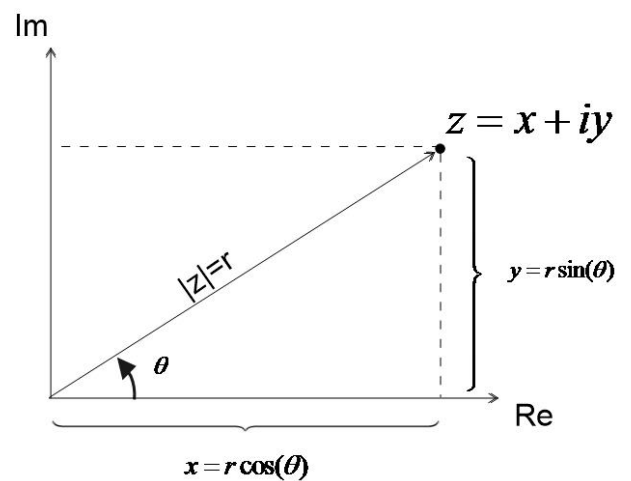
می توان عدد مختلط  $z = x + iy$  را به صورت زیر به فرم قطبی  $(r, \theta)$  تبدیل کرد:

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin \theta$$

$$\Rightarrow z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta$$

$$\Rightarrow z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$



با توجه به اینکه داریم  $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$  (اگه نمی دونستید بدونید!) پس:

$$z = re^{i\theta}$$

جهت یادآوری تکرار می کنم که آرگومان اعداد مختلط باید بر حسب رادیان نوشته شود نه بر حسب درجه.

مثال: اعداد مختلط زیر را به فرم قطبی تبدیل کنید.

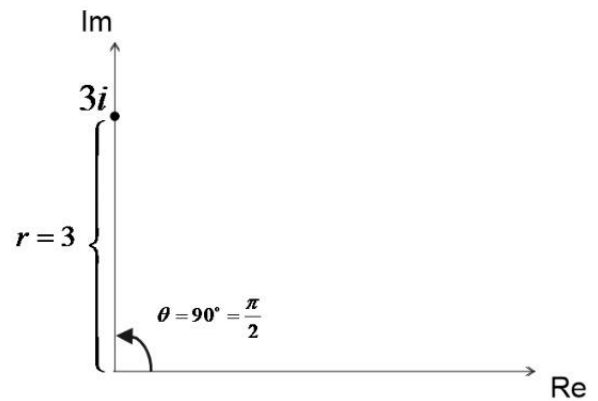
$$z = 1 - i \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \text{Arctan}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow z = re^{i\theta} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z = -1 + i\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \theta = \pi + \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow z = re^{i\theta} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

فرم قطبی اعداد مختلط ساده را می توان از روی نمودار براحتی بدست آورد. مثلا:

$$z = 3i \Rightarrow \begin{cases} |z| = 3 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow z = re^{i\theta} = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$$

زیرا  $r$  یعنی فاصله از مبدا که فاصله نقطه  $z = 3i$  از مبدا ۳ است و  $\theta$  زاویه  $r$  آن عدد با سمت مثبت محور  $x$  ها است که اینجا  $90^\circ$  یا  $\frac{\pi}{2}$  رادیان است.



نکته:

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta \\ \Rightarrow (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= \cos n\theta + i \sin n\theta \end{aligned}$$

به این فرمول، رابطه دم‌آور گویند.

مثال: مقدار  $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{12}$  را بیابید.

حل: ابتدا اعداد مختلط داده شده را به فرم قطبی تبدیل میکنیم:

$$z = 1 - \sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \theta = \text{Arctan}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow z = re^{i\theta} = 2e^{-\frac{\pi i}{3}}$$

$$z = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \theta = \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow z = re^{i\theta} = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$$

سپس این اعداد را در رابطه داده شده قرار می‌دهیم:

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{12} = \left(\frac{2e^{-\frac{\pi i}{3}}}{2e^{\frac{\pi i}{3}}}\right)^{12} = \left(\frac{e^{-\frac{\pi i}{3}}}{e^{\frac{\pi i}{3}}}\right)^{12} = \left(e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)^{12} = e^{-\frac{24\pi i}{3}} = e^{-8\pi i} = \cos(-8\pi) + i \sin(-8\pi) = 1$$

تمرین: حاصل عبارت  $(\cos 2 + i \sin 2 + 1)^n$  را بیابید. (راهنمایی:  $\sin 2 = 2 \sin 1 \cos 1$  و

$$1 + \cos 2 = 2 \cos^2 1$$