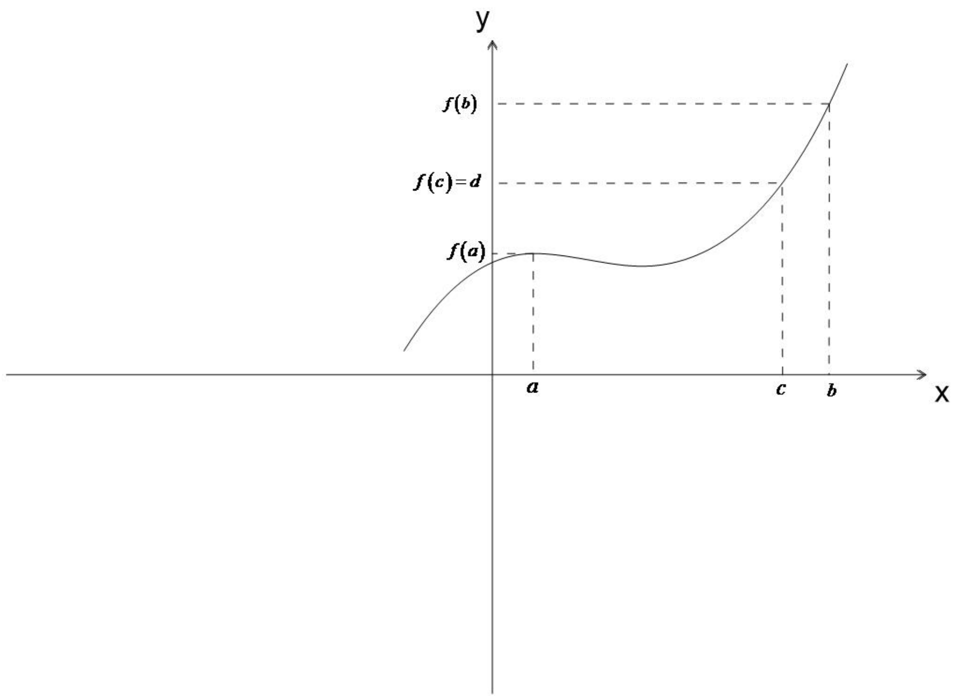
قضیه مقدار میانی:

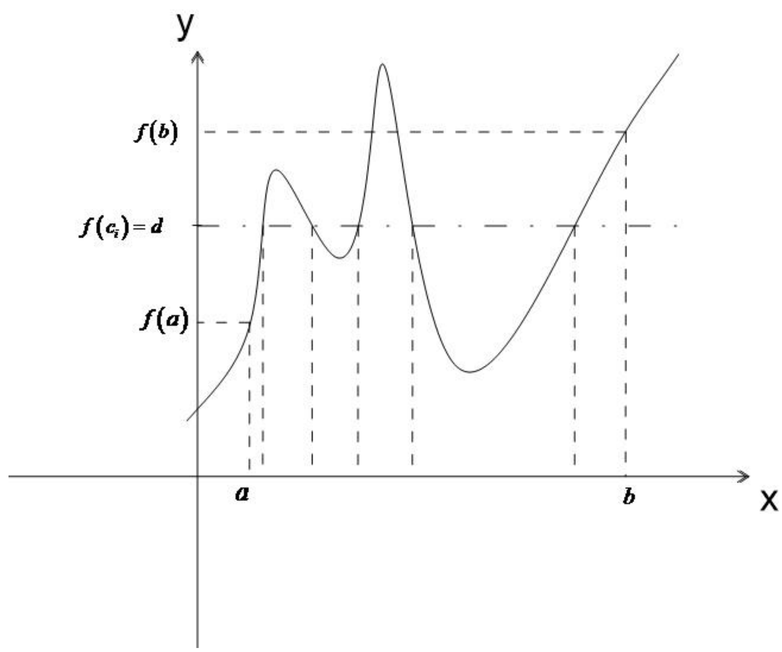
اگر تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته و $f(a)<d<f(b)$ باشد آنگاه حداقل یک c وجود دارد که مقدار تابع در $x=c$ برابر با d باشد یعنی: $f(c)=d$

این قضیه را به صورت هندسی میتوان به شکل زیر نمایش داد:



به دلیل پیوسته بودن تابع $f(x)$ به ازای هر d دلخواه بین $f(a)$ و $f(b)$ باید حتما حداقل یک c بین a و b وجود داشته باشد که مقدار تابع در x=c برابر با d باشد.

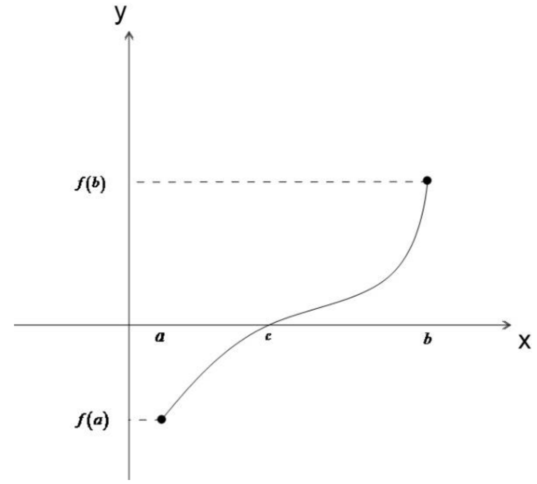
نکته: واژه «حداقل» به این معناست که c می‌تواند بیشتر از یک عدد باشد یعنی xهای دیگری نیز وجود داشته باشند که $f(c_i)=d$



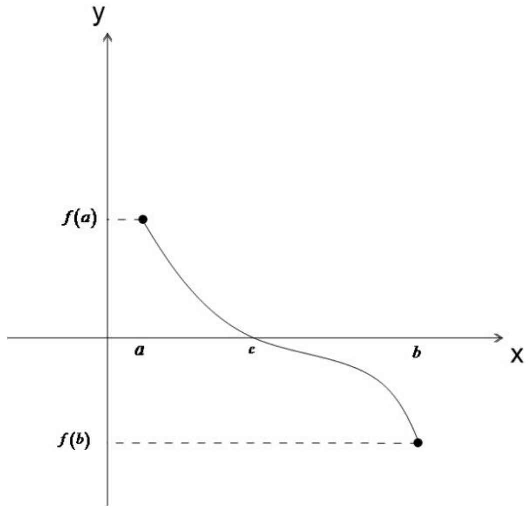
قضیه بولتزانو:

اگر تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته و $f(a).f(b)<0$ باشد آنگاه حداقل یک **c** وجود دارد که مقدار تابع در $x=c$ برابر با صفر باشد یعنی: $f(c)=0$

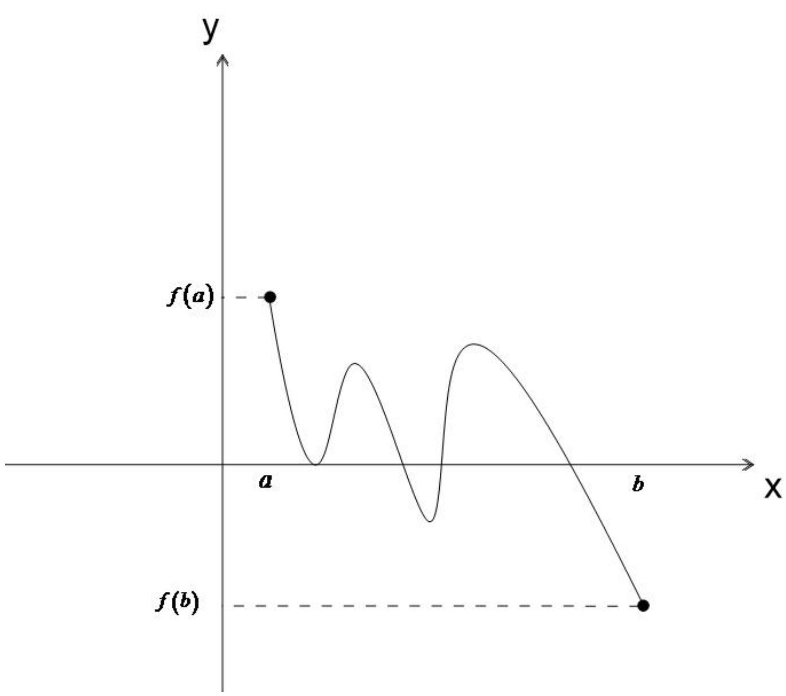
این قضیه را به صورت هندسی میتوان به شکل زیر نمایش داد:



یا



مشخصاً اگر $f(a).f(b)<0$ باشد یعنی یکی منفی و دیگری مثبت است به دلیل پیوسته بودن تابع $f(x)$ بر این بازه، باید حتما حداقل از یک نقطه با مقدار صفر (از محور xها) عبور کند که البته می‌تواند به تعداد بیش از یک بار هم محور xها را قطع کند:



از این قضیه برای اثبات وجود ریشه بین دو نقطه استفاده می‌شود.

مثال: ثابت کنید تابع $f(x)=x^4-5x+2$ بر بازه $[1,2]$ حداقل یک ریشه دارد.

حل: این تابع از نوع چندجمله‌ای است پس همه جا پیوسته است و با توجه به اینکه $f(1)=1^4-5\times1+2=-2$ و $f(2)=2^4-5\times2+2=8$ پس $f(1).f(2)<0$ پس در شرایط قضیه بولتزانو صدق می‌کند در نتیجه بر بازه $[1,2]$ حداقل یک ریشه دارد.

تمرین: نشان دهید که معادله $\sin x=x^2-x-3$ بر بازه $[0,\pi]$ حداقل یک ریشه دارد.