

محاسبه لگاریتم طبیعی اعداد مختلط ($\text{Ln}(z)$):

برای محاسبه $\text{Ln}(z)$ باید حتما آرگومان را با $2k\pi$ جمع کنیم

$$\text{Ln}(z) = \text{Ln}(r) + i(\theta + 2k\pi)$$

پس لگاریتم طبیعی یک عدد مختلط دارای بیشمار جواب است

مثال: حاصل $\text{Ln}(-i)$ را بیابید.

حل: ابتدا $-i$ را به فرم قطبی مینویسیم

$$-i \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

پس داریم:

$$\text{Ln}(-i) = \text{Ln}(1) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

که به ازای $k = 1, 2, \dots$ بیشمار جواب دارد.

تمرین: لگاریتم طبیعی اعداد مختلط زیر را بیابید

۱. $1+i$

۲. $\sqrt{3}+i$

۳. -1

۴. $4i$

نکته:

$$\cos i\theta = \cosh \theta$$

$$\sin \theta = i \sinh \theta$$

مثال: حاصل $\cos(3+5i)$ را بیابید.

حل: با استفاده از خواص مثلثات داریم:

$$\cos(3+5i) = \cos 3 \cos 5i - \sin 3 \sin 5i = \cos 3 \cosh 5 - i \sin 3 \sinh 5$$

تمرین: حاصل $\sin(4+3i)$ را بیابید.