دستور هوپیتال:

در فصل بعد با مفهوم مشتق آشنا می‌شویم و در بحث کاربرد مشتق خواهیم دید که جواب حدهایی که به صورتهای مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ باشند با مشتق‌گیری از صورت و مخرج بدست می‌آیند:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\ \text{or}\ \frac{\infty}{\infty}\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

که در فصل بعد در مورد آن مفصل صحبت خواهیم کرد.

نکته: حاصل حد حاصلضرب دو تابع که یکی به صفر میل میکند و دیگری تابعی کراندار است (به بی‌نهایت میل نمی‌کند) برابر است با صفر.

از این نکته اکثرا در حل حدهای شامل توابع مثلثاتی استفاده میکنیم زیرا میدانیم توابع $\sin x$ و $\cos x$ کراندار بوده و به ازای هر مقدار داخل خود، جوابی بین ۱- و ۱ دارند.

مثال: حاصل حد $\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ را بیابید.

حل: واضح است که وقتی x به سمت 0 میل می‌کند داخل سینوس به بی‌نهایت میل میکند ولی هر چند که باشد سینوس آن بین ۱- و ۱ است و حاصل حد x^2 نیز صفر است پس جواب حد حاصلضرب x^2 در تابع کراندار $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ در $x=0$ برابر با صفر است.

نکته: برای محاسبه حدهای به فرم $\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)}$ (تابع به توان تابع) که با جایگذاری عدد داده شده به یکی فرمهای مبهم $0^0, 0^\infty, \infty^\infty, 1^\infty$ برسند، باید از رابطه $x=e^{Lnx}$ استفاده کرده و سپس از هوپیتال استفاده کنیم.

یعنی:

$$u(x)^{v(x)} = e^{Lnu^{v}} = e^{vLnu}$$

مثال: حاصل حد $\lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}$ را بیابید

حل:

$$\lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x} = \lim_{x\to 1} e^{Ln(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}} = \lim_{x\to 1} e^{\cot\pi x Ln(1+\sin\pi x)}$$

ابتدا حاصل حد $\lim_{x\to 1}\cot\pi x Ln(1+\sin\pi x)$ را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to 1}\cot\pi x Ln(1+\sin\pi x) = \lim_{x\to 1}\frac{Ln(1+\sin\pi x)}{\tan\pi x}$$

$$\overset{Hop}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi\cos\pi x}{1+\sin\pi x}}{\pi(1+\tan^2\pi x)} = -1$$

پس حاصل حد موردنظر برابر است با: e^{-1}

(در حل این حد از روش هوپیتال استفاده کردیم که در صورت داشتن اشکال در مشتقگیری، به فصل بعد باید رجوع کنید)

تمرین: حاصل حدود زیر را بیابید:

۱. $\lim_{x\to +\infty}(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$

۲. $\lim_{x\to +\infty}(1+4x)^{\frac{1}{Lnx}}$

۳. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$

نکته: با استفاده از روش بالا می‌توان ثابت کرد: $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{a}{x+b}\right)^{cx+d} = e^{ac}$

مثال:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+4}\right)^{5x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+4-4-2}{3x+4}\right)^{5x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-6}{3x+4}\right)^{5x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{x+\frac{4}{3}}\right)^{5x+1}\underset{c=5}{\overset{a=-2}{=}}e^{-10}$$

برای استفاده از نکته بالا باید حتما کسر را به فرم مربوط به آن تبدیل کنیم که با تفکیک کسر و تقسیم صورت و مخرج بر ضریب x در مخرج این کار را انجام دادیم.

تمرین: حاصل حدود زیر را بیابید:

۱. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{3x-4}\right)^{9x-1}$

۲. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{2x}$

۳. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{3x-6}$