

محاسبه حد چند جمله‌ای‌ها به کمک هم‌ارزی‌ها

در محاسبه حد در بی‌نهایت در چند جمله‌ای‌ها عبارات بزرگتر را نگه داشته و بقیه عبارات را صرف‌نظر میکنیم (این کار برای توابعی که زیر رادیکال هستند مجاز نیست)

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 2x^2 - 2x + 5}{3x^3 - 7x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{3x^3} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 - 4x^2 + 2x - 6}{4x^2 - 2x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 - 2x^2 + x}{2x^4 + 3x + 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{2x} = \frac{6}{\infty} = 0$$

نکته: حاصل تقسیم هر عدد (چه مثبت چه منفی) بر $+\infty$ یا $-\infty$ برابر با صفر می‌شود و حاصل تقسیم بینهایت بر هر عددی (و حتی حاصل‌ضربشان) برابر با بی‌نهایت می‌شود که علامت بی‌نهایت جواب برابر است با حاصل‌ضرب علامتهای عدد و بی‌نهایت داده شده. مثلا:

$$\frac{-3}{+\infty} = 0$$

$$\frac{+\infty}{-3} = -\infty$$

$$\frac{-\infty}{-4} = +\infty$$

$$2 \times (-\infty) = -\infty$$

محاسبه حد چند جمله‌ای‌ها به کمک هم‌ارزی‌ها

نکته: در محاسبه حد در $x=0$ توان‌های کوچکتر را نگه داشته و بقیه عبارات را حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 2x^2 - 2x}{3x^3 - 7x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{-x} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^3 + 5x^2 + 5x}{x^3 - 2x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{-4} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - x^2 + x - 4}{x^4 - 5x^3 + 9x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4}{9x^2} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

نکته: برای محاسبه حد توابع چند جمله‌ای زیر رادیکال از روابط زیر (معروف به هم‌ارزی‌های نیوتن) استفاده می‌کنیم:

$$\text{اگر } n \text{ زوج باشد: } \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \sim \sqrt[n]{a} \left| x + \frac{b}{na} \right|$$

$$\text{اگر } n \text{ فرد باشد: } \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \sim \sqrt[n]{a} \left(x + \frac{b}{na} \right)$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{4x^3 + 7x^2 - 3x + 2} - \sqrt[3]{4}x}{\sqrt[4]{5x + 4\sqrt{5}x^4 - x^3 + x^2 - 8x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{4} \left(x + \frac{7}{3 \times 4} \right) - \sqrt[3]{4}x}{\sqrt[4]{5x + 4\sqrt{5}} \left| x + \frac{-1}{4 \times 5} \right|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{4}x + \frac{7\sqrt[3]{4}}{12} - \sqrt[3]{4}x}{\sqrt[4]{5x - 4\sqrt{5}} \left(x + \frac{-1}{20} \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{7\sqrt[3]{4}}{12}}{\sqrt[4]{5x - 4\sqrt{5}} + \frac{4\sqrt{5}}{20}} = \frac{\frac{7\sqrt[3]{4}}{12}}{\frac{4\sqrt{5}}{20}} = \frac{7\sqrt[3]{4} \times 20}{4\sqrt{5} \times 12} = \frac{7\sqrt[3]{4} \times 5}{4\sqrt{5} \times 3} = \frac{35\sqrt[3]{4}}{3\sqrt{5}}$$

در مخرج قدرمطلق عدد منفی باید مثبت شود پس قدرمطلق را حذف و پشت عبارت یک منفی می‌گذاریم:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

تمرین: حاصل حدهای زیر را حساب کنید

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{6x^5 - 2x^4 - x} - \sqrt[5]{6x}}{\sqrt{2x} - \sqrt{2x^2 + 4x - 1}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{2x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 6} + \sqrt[4]{2x}}{\sqrt{5x} + \sqrt{5x^2 - 2x + 7}}$$

مرتبه در بی‌نهایت:

اگر x به سمت مثبت بی‌نهایت کند از عبارات ضعیف‌تر در مقابل عبارات قوی‌تر صرف‌نظر می‌کنیم:

$$x^a \gg x! \gg a^x \gg x^b \gg \ln x \quad a > 1, b > 0$$

$$a^x \gg b^x \quad a > b > 1$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + 5x - 3\ln x + e^{5x})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{5x})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{5x}{x}} = e^5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{\frac{3x^2}{x-2\ln x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1+1}{x+1} \right)^{\frac{3x^2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1} \right)^{3x} = e^3$$

تمرین: حاصل‌حدهای زیر را بیابید

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sqrt{4^x + 6^x - 5^x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^{x+1} - 4^{x-1} + 7x - 3}{4^{x+2} + 4^x + x + 1}$$