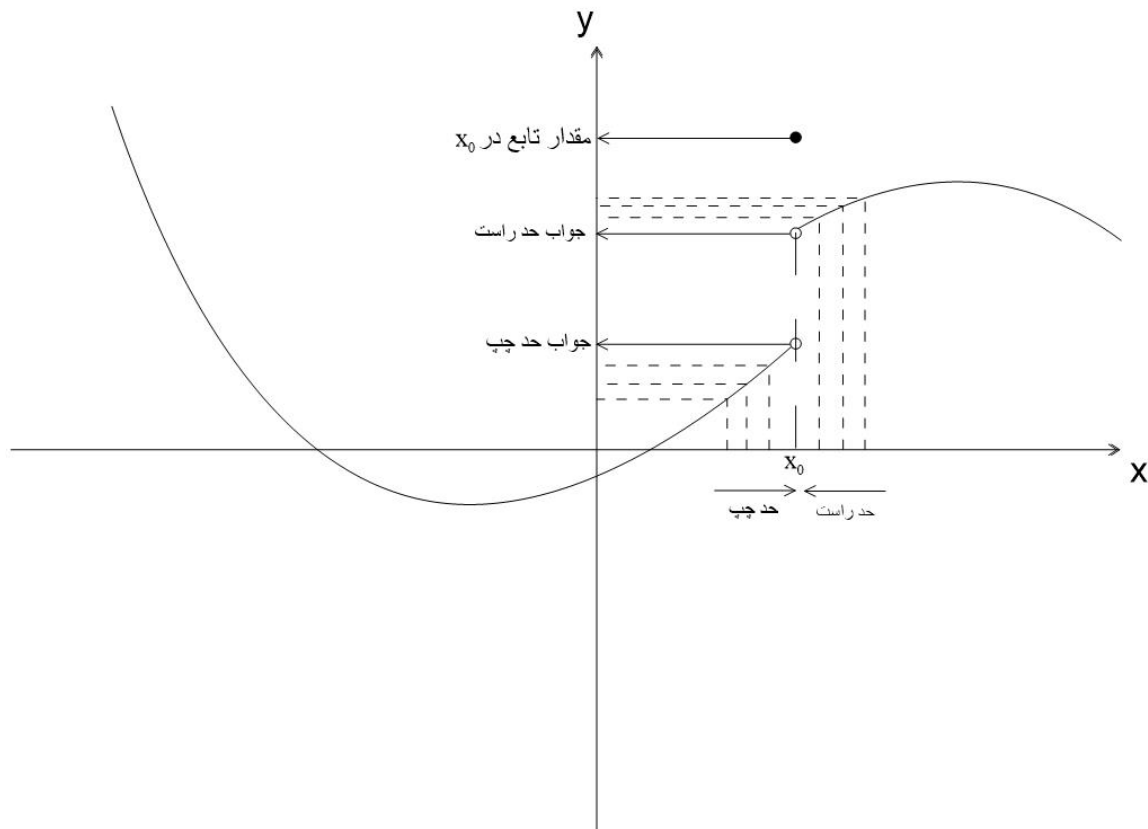


## حد چپ و راست:

اگر  $x$  از سمت عددی بزرگتر به نقطه مورد نظر نزدیک شود حد راست و اگر از سمت عددی کوچکتر نزدیک شود حد چپ بدست می‌آید.



حد راست:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

حد چپ:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

برای اینکه تابع در یک نقطه حد داشته باشد باید حد چپ و راست موجود و با هم برابر باشند.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

مثال: تابع  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  در  $x=0$  حد ندارد زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

پس حد چپ و راست  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  در  $x=0$  با یکدیگر برابر نیست پس تابع در این نقطه حد ندارد.

حد چپ و راست در یک نقطه، اکثراً در توابع شامل قدرمطلق یعنی  $|u(x)|$  یا شامل جزء صحیح یعنی  $[u(x)]$  با هم می‌تواند متفاوت باشد.

**تابع جزء صحیح  $[x]$ :**

جزء صحیح یک عدد، بزرگترین عدد صحیحی است که از آن عدد کمتر یا مساوی آن عدد است! اگر یک مقدار پیچیده شد می‌تونم اینجوری توضیح بدم:

۱- اگر عدد داخل جزء صحیح، خودش عدد صحیح باشد جواب جزء صحیح برابر با همان عدد خواهد بود:

$$[5] = 5, [8] = 8, [0] = 0, [-1] = -1, [-6] = -6$$

۲- اگر عدد داخل جزء صحیح، عدد غیر صحیح مثبت باشد جواب جزء صحیح برابر با قسمت صحیح همان عدد خواهد بود:

$$[5.6] = 5, [8.9999] = 8, [0.73] = 0, [1.531] = 1, [6.4] = 6$$

۳- اگر عدد داخل جزء صحیح، عدد غیر صحیح منفی باشد جواب جزء صحیح برابر با قسمت صحیح همان عدد منهای یک خواهد بود:

$$[-5.6] = -6, [-4.02] = -5, [-0.05] = -1, [-1.902] = -2, [-6.15] = -7$$

مثال: حاصل حد چپ و راست تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4}$  را در نقطه  $x = 2$  بیابید.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2 + \varepsilon)^2 - 4}{[2 + \varepsilon]^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4 + \varepsilon - 4}{2^2 - 4} = \frac{[\varepsilon]}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

صورت و مخرج صفر واقعی (صفر دقیق) هستند و به دلیل صفر شدن مخرج این حد جواب ندارد پس حد راست وجود ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2 - \varepsilon)^2 - 4}{[2 - \varepsilon]^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4 - \varepsilon - 4}{1^2 - 4} = \frac{[-\varepsilon]}{1 - 4} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

پس حد چپ موجود و برابر با  $\frac{1}{3}$  است.

تمرین: حاصل حد چپ و راست تابع  $f(x) = \frac{1 - |x|}{x - 1}$  را در نقطه  $x = 0$  بیابید.