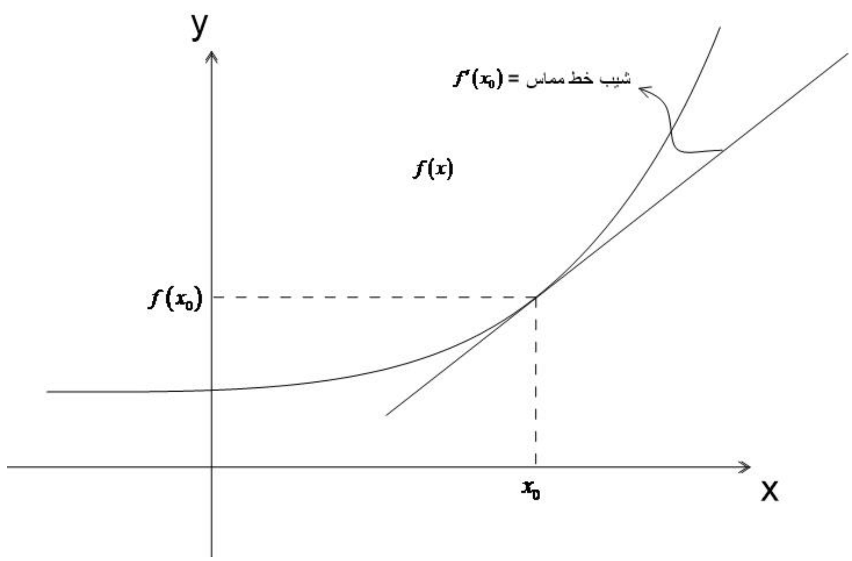
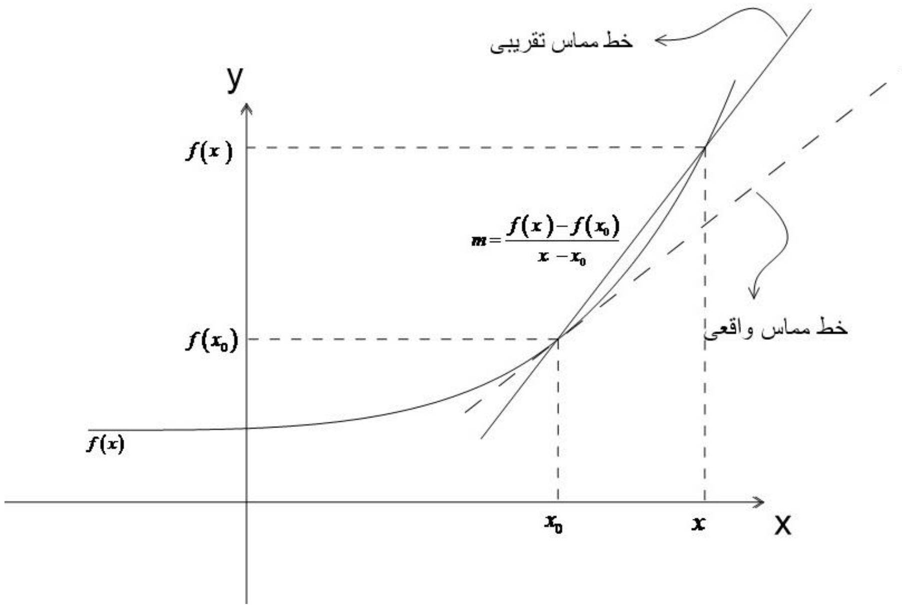
مشتق تابع:

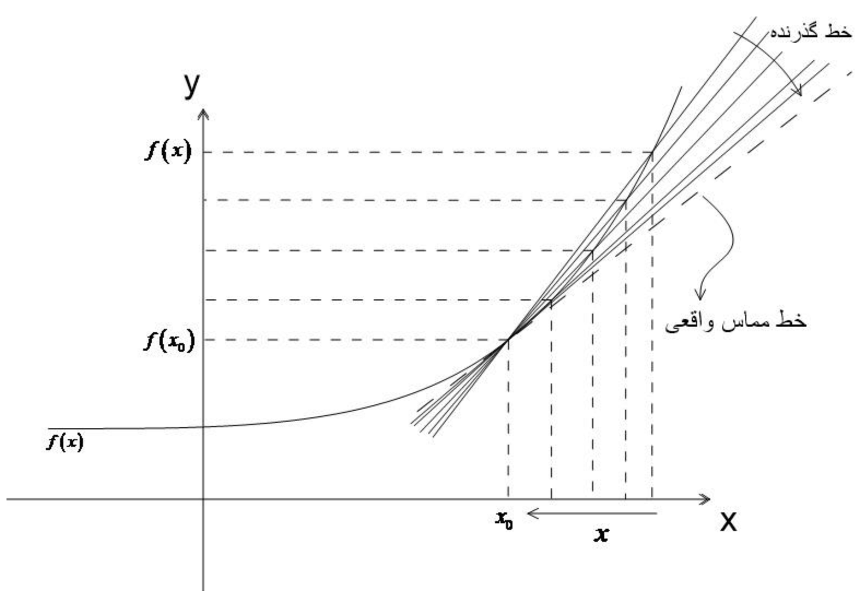
مشتق یک تابع در یک نقطه، نشاندهنده میزان سرعت تغییرات مقدار تابع یعنی y با تغییرات x است. پس در واقع برای پیدا کردن مشتق یک تابع در یک نقطه باید بررسی کنیم y آن تابع با چه سرعتی نسبت به x تابع تغییر می‌کند. برای این منظور کافیست شیب خطی که بر تابع در آن نقطه مماس است را بیابیم. شیب این خط را با $f'(x_0)$ نمایش می‌دهند که همان مشتق تابع در نقطه x_0 است.



واضح است که با داشتن یک نقطه از یک خط راست، مانند $(x_0, f(x_0))$ نمی‌توان شیب یک خط گذرنده از آن نقطه را یافت زیرا از هر نقطه‌ای بی‌نهایت خط گذرنده وجود دارد. برای یافتن شیب یک خط نیاز به دو نقطه داریم تا از فرمول شیب خط $m = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ شیب خط گذرنده از آنها را بیابیم. پس یک نقطه در نزدیکی x_0 مانند x در نظر می‌گیریم و شیب خط گذرنده از این دو نقطه را می‌یابیم.



شیب خط بدست آمده نزدیک به شیب خط مماس است ولی برابر نیست و خطای زیادی دارد. با نزدیک کردن نقطه x به x_0 می‌توان خطا را کاهش داده و شیب خط گذرنده را به مشتق تابع در x_0 نزدیکتر کرد:

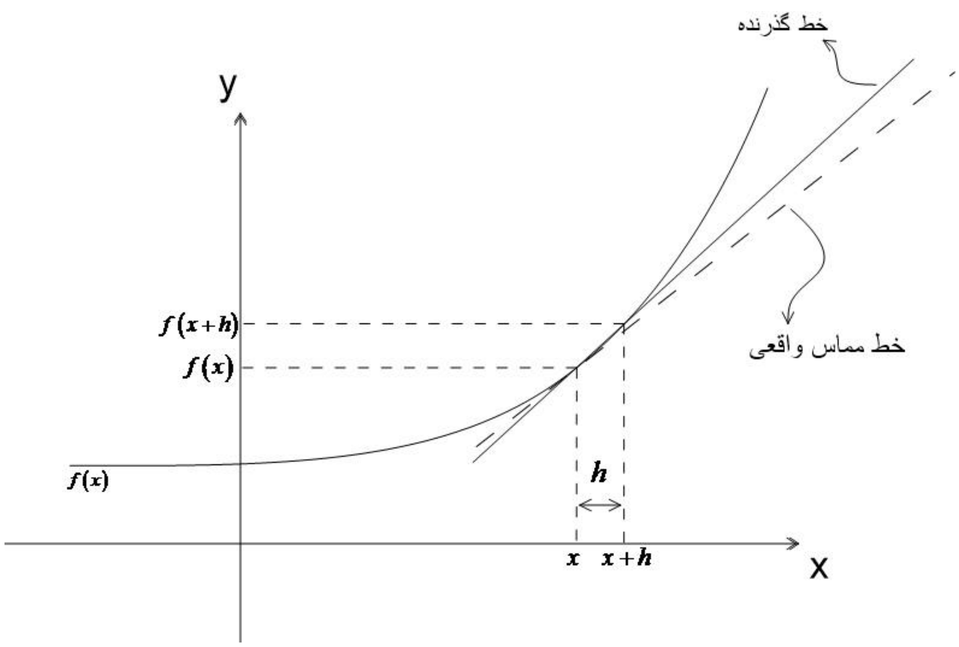


ملاحظه می‌کنید که با نزدیک شدن نقطه x به x_0 شیب خط گذرنده از دو نقطه به شیب خط مماس که همان مشتق تابع است نزدیک می‌شود. در واقع اگر حد این شیب را وقتی x به x_0 میل می‌کند را حساب کنیم میتوانیم به مشتق تابع دست بیابیم:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

باتوجه به اینکه نقطه x_0 ثابت است و x از طرفین به آن نزدیک می‌شود، پیوستگی در هر نقطه‌ای شرط لازم (نه کافی) برای مشتق‌پذیری است. می‌توان به جای تعریف بالا، از تعریف زیر برای محاسبه مشتق تابع در نقطه دلخواه x استفاده کرد:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



رابطه $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ زمانی کاربرد دارد که مشتق تابع را در یک نقطه خاص بخواهیم بدست آوریم و رابطه $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ زمانی استفاده می‌شود که رابطه‌ای کلی برای مشتق تابع در هر نقطه بر حسب x را از ما بخواهند. در این حالت، مشتق را به صورت $y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}$ نیز نمایش می‌دهند.

مثال: مشتق تابع $f(x)=x^2$ را در نقطه $x=1$ بیابید.

حل: مشتق تابع را در یک نقطه خاص مانند $x=1$ می‌خواهیم پس رابطه $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ را استفاده می‌کنیم:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\xrightarrow[x_0=1]{f(x)=x^2}f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$$

تمرین: مشتق توابع زیر را در نقاط خواسته شده بیابید.

۱. $f(x)=x^3, x_0=2$

۲. $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}, x_0=2$

۳. $f(x)=5x^2+3x-1, x_0=-1$

مثال: مشتق تابع $f(x)=x^3$ را بیابید.

حل: در این مسئله مشتق در نقطه مشخصی خواسته نشده است پس باید رابطه مشتق آن را به کمک رابطه $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ بدست آوریم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\overset{f(x)=x^3}{\Rightarrow} f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}3x^2+3xh+h^2=3x^2$$

پس رابطه مشتق تابع $f(x)=x^3$ برابر است با: $f'(x)=3x^2$

تمرین: رابطه مشتق توابع زیر را بیابید.

۱. $f(x)=x^2+3x-2$

۲. $f(x)=\sin x$ (راهنمایی: $\sin(x+h)=\sin x\cosh+\sinh\cos x$)