

مشتق زنجیره‌ای:

هر گاه y تابعی از x (مانند: $y=f(x)$) و x تابعی از پارامتری دیگر مانند t (مانند: $x=g(t)$) باشد، برای محاسبه مشتق y بر حسب t باید از مشتق زنجیره‌ای به فرم زیر کمک گرفت:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

یعنی به جای مشتق گرفتن از y نسبت به t کفایت از y نسبت به x مشتق گرفته و سپس از x نسبت به t مشتق بگیریم و این دو عبارت را در هم ضرب کنیم زیرا dx در صورت و مخرج می‌تواند ساده شود و فقط $\frac{dy}{dt}$ باقی می‌ماند.

مثال: اگر $y = x^2 + \ln x$ و $x = 2\sin 4t$ باشد مشتق y بر حسب t را بیابید.

حل: در این مثال مشتق y بر حسب t خواسته شده است ولی ما y را بر حسب x و x را بر حسب t داریم، پس به کمک رابطه مشتق زنجیره‌ای می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} = \left(2x + \frac{1}{x}\right) \times (8\cos 4t)$$

در نهایت معادل x را بر حسب t جایگذاری می‌کنیم زیرا در صورت سوال، مشتق y بر حسب t را خواسته پس باید جواب نهایی کلاً بر حسب t باشد:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} = \left(2x + \frac{1}{x}\right) \times (8\cos 4t) = \left(4\sin 4t + \frac{1}{2\sin 4t}\right) \times (8\cos 4t)$$

تمرین: اگر $y = \frac{2x-3}{3x+7}$ و $x = 3e^{5t} + 2\ln t$ باشد مشتق y بر حسب t را بیابید.

مشتق زنجیره‌ای

نکته: برای ۳ یا چند تابع متوالی نیز می‌توان رابطه مشتق زنجیره‌ای را بسط داد. یعنی به طور مثال اگر y بر حسب t و t بر حسب u و u بر حسب x باشد، برای محاسبه مشتق y بر حسب x کفایت تمام مشتق‌ها را محاسبه و در یکدیگر ضرب کنیم تا به جواب برسیم زیرا دیفرانسیل‌های صورت با دیفرانسیل‌های مخرج ساده شده و در نهایت مشتق مورد نظر به دست می‌آید.

مثال: اگر $y = 5t^2 - 3t$ و $t = 3e^{2u} - \text{Arctan } u$ و $u = \frac{1}{4x^2 - 1}$ باشد، مشتق y بر حسب x را بیابید.

حل: مطابق نکته بالا کفایت تمام مشتق‌ها را در همدیگر ضرب کنیم تا مشتق y بر حسب x به دست آید (به ساده شدن دیفرانسیل‌ها در صورت و مخرج دقت کنید).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{du} \times \frac{du}{dx} = (10t - 3) \times \left(6e^{2u} - \frac{1}{u^2 + 1} \right) \times \left(-\frac{8x}{(4x^2 - 1)^2} \right)$$

تمرین: اگر $y = 3 \text{Arccos}(\text{Ln } x) + 2e^{5x}$ و $t = 4u^3 + 2u$ و $u = \text{Arcsinh } 3x + \frac{7x^3 + 3x^2 - 4}{6x + 1}$ باشد، مشتق y بر حسب x را بیابید.