

مشتق ضمنی:

اگر y به صورت صریح بر حسب x (مانند $y=f(x)$) داده نشده باشد و یک فرمول کلی شامل x و y مانند $F(x,y)=0$ داده شده باشد (مانند: $2xy^2 + y^3 + 3y \sin x - 9e^{2x} = 0$) برای محاسبه مشتق y بر حسب x باید از قاعده مشتقگیری ضمنی استفاده کنیم. مشتقگیری ضمنی را می توان به دو روش زیر انجام داد که تفاوتی در جواب ندارند ولی در اغلب موارد روش اول راحتتر است:

روش اول: در این روش ابتدا تمام عبارات را به سمت چپ منتقل می کنیم تا به فرم $F(x,y)=0$ برسیم. سپس از قاعده $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$ مشتق y بر حسب x را می یابیم. در این رابطه F'_x یعنی مشتق $F(x,y)$ بر حسب x وقتی y ثابت فرض شود (مانند یک عدد) و F'_y یعنی مشتق $F(x,y)$ بر حسب y وقتی x ثابت فرض شود.

مثال: اگر داشته باشیم $x^4y^3 + 4y = 5y^2x^3 + 3xy - 7$ ، مشتق y بر حسب x را بیابید.

حل: ابتدا تمام عبارات را به سمت چپ منتقل می کنیم، سپس از رابطه مشتقگیری ضمنی استفاده می کنیم:

$$x^4y^3 + 4y = 5y^2x^3 + 3xy - 7 \Rightarrow x^4y^3 + 4y - 5y^2x^3 - 3xy + 7 = 0$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{4x^3y^3 - 15y^2x^2 - 3y}{3x^4y^2 + 4 - 10yx^3 - 3x}$$

تمرین: اگر داشته باشیم $x^2 \cos y + \frac{2x-y}{y^2+2x} = xy^2 - 4x + 5$ ، مشتق y بر حسب x را بیابید.

روش دوم: در این روش نیازی نیست در ابتدا تمام عبارات به یک سمت منتقل شوند و میتوان از عبارت داده شده به همان شکل مشتق گرفت. کافی است y را تابعی بر حسب x در نظر گرفته (مشابه u در فرمول‌های مشتق‌گیری) و از کل عبارت مشتق بگیریم و برای مشتق y از y' استفاده می‌کنیم. در نهایت عبارات شامل y' را به سمت چپ تساوی و عبارات دیگر را به سمت راست منتقل کرده و با فاکتور گرفتن از y' و انتقال ضرایب به سمت چپ، رابطه مشتق بر حسب x و y را می‌یابیم.

مثال: اگر داشته باشیم $2x^2y^5 - 2xy = y^2x^3 + \sin y$ ، مشتق y بر حسب x را بیابید.

$$\begin{aligned} 2x^2y^5 - 2xy &= y^2x^3 + \sin y \Rightarrow 4xy^5 + 10x^2y'y^4 - 2y - 2xy' = 2y'yx^3 + 3y^2x^2 + y' \cos y \\ \Rightarrow 10x^2y'y^4 - 2xy' - y' \cos y - 2y'yx^3 &= 3y^2x^2 - 4xy^5 + 2y \\ \Rightarrow y'(10x^2y^4 - 2x - \cos y - 2yx^3) &= 3y^2x^2 - 4xy^5 + 2y \\ \Rightarrow y' &= \frac{3y^2x^2 - 4xy^5 + 2y}{10x^2y^4 - 2x - \cos y - 2yx^3} \end{aligned}$$

تمرین: اگر داشته باشیم $e^{2x+3y} = x^2 - \ln(xy^3)$ ، مشتق y بر حسب x را بیابید.