مکان هندسی در اعداد مختلط:

برای یافتن مکان هندسی در بحث مختلط کافیست با جایگذاری $x+iy$ بجای z و استفاده از مفاهیم گفته شده (مانند $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$، $\bar{z}=x-iy$، $\mathrm{Re}(z)=x$، $\mathrm{Im}(z)=y$ و...) و یافتن ارتباطی بین x و y یا یافتن هرکدام از آنها، نقاطی از صفحه مختلط $(\mathrm{Re}-\mathrm{Im})$ را بیابیم که در رابطه داده شده صدق کنند.

مثال: مکان هندسی مربوط به $\mathrm{Im}(\frac{1}{z}+1)>\frac{1}{4}$ را بیابید.

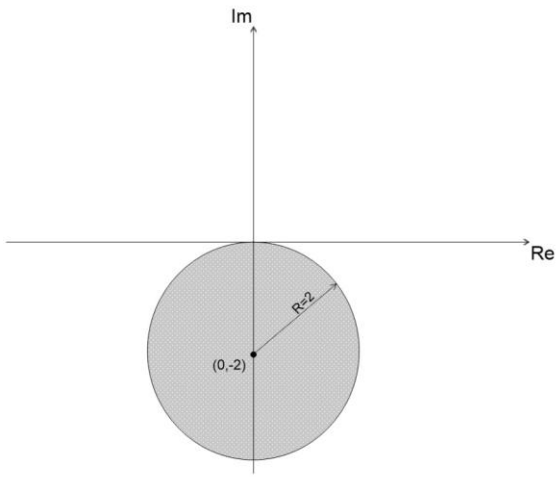
حل:

$$\mathrm{Im}(\frac{1}{z}+1)>\frac{1}{4}\Rightarrow \mathrm{Im}(\frac{1}{x+iy}+1)>\frac{1}{4}\Rightarrow \mathrm{Im}(\frac{x-iy}{x^2+y^2}+1)>\frac{1}{4}\Rightarrow \mathrm{Im}(\frac{x-iy+x^2+y^2}{x^2+y^2})>\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(\frac{x+x^2+y^2}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2})>\frac{1}{4}\Rightarrow \frac{-y}{x^2+y^2}>\frac{1}{4}\Rightarrow -4y>x^2+y^2\Rightarrow 0>x^2+y^2+4y$$

$$x^2+\underbrace{y^2+4y+4}_{(y+2)^2}-4<0\Rightarrow x^2+(y+2)^2<4$$

داخل دایره‌ای به مرکز $(0,-2)$ و شعاع ۲



نکته: از دبیرستان قطعاً!! همه شما به یاد دارید که $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ معادله یک دایره به مرکز (a,b) و شعاع R است و $(x-a)^2+(y-b)^2<R^2$ داخل آن دایره و $(x-a)^2+(y-b)^2>R^2$ خارج آن دایره است.

نکته جدید: عبارت $|z-z_0|=R$ معادله یک دایره به مرکز z_0 و شعاع R است.

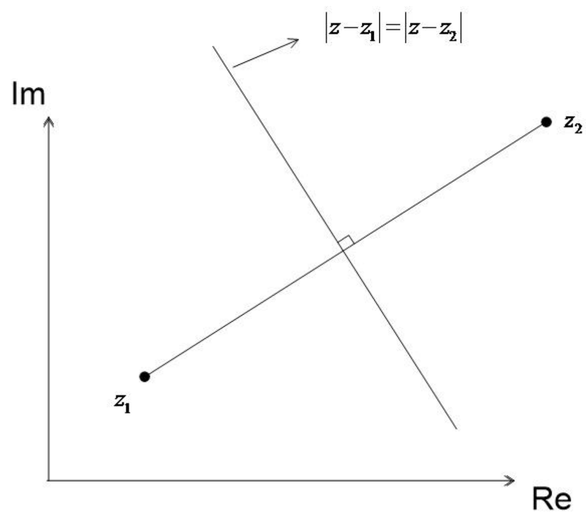
اثبات:

$$|z-z_0|=R\Rightarrow\left|(x+iy)-(x_0+iy_0)\right|=R\Rightarrow\left|(x-x_0)+i(y-y_0)\right|=R$$
$$\Rightarrow\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R\Rightarrow(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

نکته: عبارت $|z-z_1|+|z-z_2|=R$ معادله یک بیضی به کانونهای z_1 و z_2 است که البته شرط $|z_1-z_2|<R$ باید برقرار باشد.

نکته: عبارت $|z-z_1|-|z-z_2|=R$ معادله یک هذلولی به کانونهای z_1 و z_2 است که البته شرط $|z_1-z_2|>R$ باید برقرار باشد.

نکته: عبارت $|z-z_1|=|z-z_2|$ معادله عمود منصف پاره‌خطی است که دو نقطه z_1 و z_2 را به همدیگر متصل می‌کند.

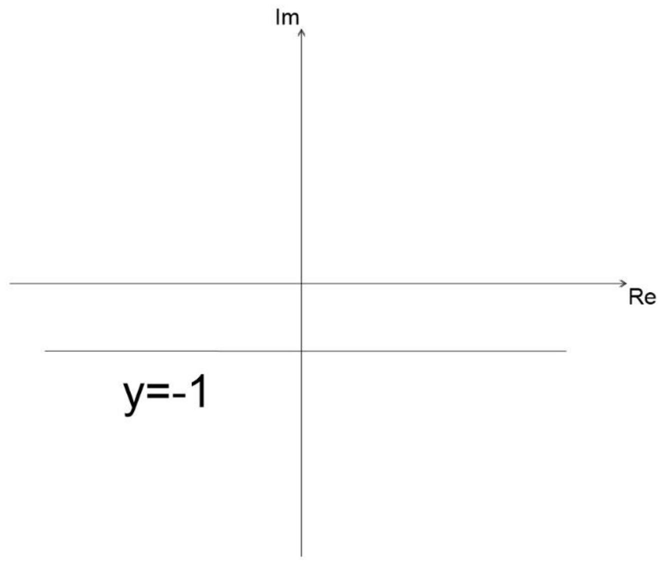


مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه را با رابطه $\operatorname{Re}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)=1$ بیابید.

حل:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)=1 \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{x+iy-i}{x+iy+i}\right)=1 \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}\right)=1$$
$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}\times\frac{x-i(y+1)}{x-i(y+1)}\right)=1 \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{x^2-ix(y+1)+ix(y-1)-i^2(y-1)(y+1)}{x^2+(y+1)^2}\right)=1$$
$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{(x^2+(y^2-1))+i\left[-x(y+1)+x(y-1)\right]}{x^2+(y+1)^2}\right)=1 \Rightarrow \frac{x^2+(y^2-1)}{x^2+(y+1)^2}=1$$
$$\Rightarrow x^2+(y^2-1)=x^2+(y+1)^2 \Rightarrow x^2+y^2-1=x^2+y^2+2y+1 \Rightarrow 2y=-2$$
$$\Rightarrow y=-1$$

پس مکان هندسی رابطه داده شده خط $y=-1$ است:



تمرین: مکان هندسی‌های زیر را بیابید

۱. $\operatorname{Im}(\frac{1}{z})>1$

۲. $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{1-z}\right) \geq -\frac{1}{2}$

۳. $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \geq 1$

۴. $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z-2i}\right) = \frac{1}{4}$