هوپیتال:

در فصل قبل مختصراً توضیح دادیم که اگر جواب حدی به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ باشد، جواب حد با مشتق‌گیری از صورت و مخرج بدست می‌آید. به این روش، دستور هوپیتال می‌گوییم:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\ \text{or}\ \frac{\infty}{\infty}\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال: حاصل حد $\lim_{x\to 1}\frac{Ln\left(x^2+x-1\right)}{xe^x-e}$ را بیابید.

حل: ابتدا عدد ۱ را در حد قرار می‌دهیم تا جواب را بررسی کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{Ln\left(x^2+x-1\right)}{xe^x-e}=\frac{Ln\left(1^2+1-1\right)}{1e^1-e}=\frac{Ln(1)}{e-e}=\frac{0}{0}$$

جواب به فرم مبهم $\frac{0}{0}$ در آمده است پس میتوانیم از دستور هوپیتال استفاده کنیم که در محاسبه حد به اختصار با Hop نمایش می‌دهند:

$$\lim_{x\to 1}\frac{Ln\left(x^2+x-1\right)}{xe^x-e}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x+1}{x^2+x-1}}{e^x+xe^x}=\frac{\frac{3}{1}}{e+e}=\frac{3}{2e}$$

تمرین: حاصل حدود زیر را محاسبه کنید.

۱. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-7x^2+10x}{x^2+x-6}$

۲. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sin(\pi x)}{x^2-16}$

۳. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{Lnx}{x^2-x}$

نکته: اگر جواب حد به فرم مبهم $0\times\infty$ در بیاید کافیست یکی از عبارات را به مخرج ببریم ($x=\frac{1}{1/x}$) که در اینصورت جواب حد به فرم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل شده و به کمک هوپیتال حل می‌شود.

مثال: حاصل حد $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ را بیابید.

حل: ابتدا عدد ۱ را در حد جایگذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0\times\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\times\infty$$

جواب حد به فرم مبهم $0\times\infty$ است پس به کمک نکته بالا داریم:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{1/\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\frac{0}{\cot\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{0}{0}$$

مشاهده می‌کنیم که جواب به فرم مبهم $\frac{0}{0}$ در آمده است پس میتوانیم از دستور هوپیتال استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}(1+\cot^2\left(\frac{\pi x}{2}\right))}=\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}(1+0)}=\frac{2}{\pi}$$

تمرین: حاصل حدود زیر را محاسبه کنید.

۱. $\lim_{x\to 0^+} xLnx$

۲. $\lim_{x\to 0} \cot 2x \sin 6x$

۳. $\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{Arctan}\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right)$

نکته: اکثر حدود به فرم $\infty-\infty$ را میتوان با مخرج مشترک گرفتن به فرم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کرده و از هوپیتال استفاده کنیم.

مثال: حاصل حد $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{Lnx}-\frac{1}{x-1}\right)$ را بیابید.

حل: مشاهده می‌کنیم که جواب به صورت $\infty-\infty$ است:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{Lnx}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{0}-\frac{1}{0}\right)=\infty-\infty$$

ابتدا از دو کسر مخرج مشترک می‌گیریم سپس از هوپیتال کمک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{Lnx}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-Lnx}{(x-1)Lnx}\right)=\frac{0}{0}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{Lnx+\frac{x-1}{x}}\right)$$

$$=\frac{0}{0}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1(x)-1(x-1)}{x}}\right)=\frac{1}{1+\frac{1-0}{1}}=\frac{1}{2}$$

نکته: همانطور که در مثال بالا دیدیم، میتوان ۲ یا حتی چند بار متوالی از هوپیتال استفاده کنیم.

تمرین: حاصل حدود زیر را محاسبه کنید.

۱. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\tan^2 x}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\right)$

۲. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$ (راهنمایی: پس از هوپیتال از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده کنید)

۳. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ (راهنمایی: مشابه بالا)