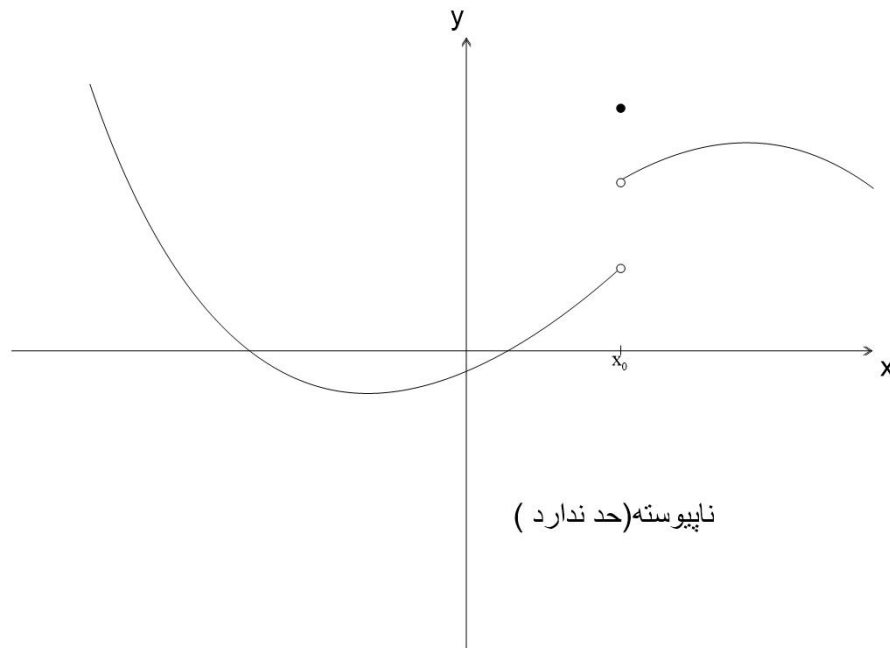


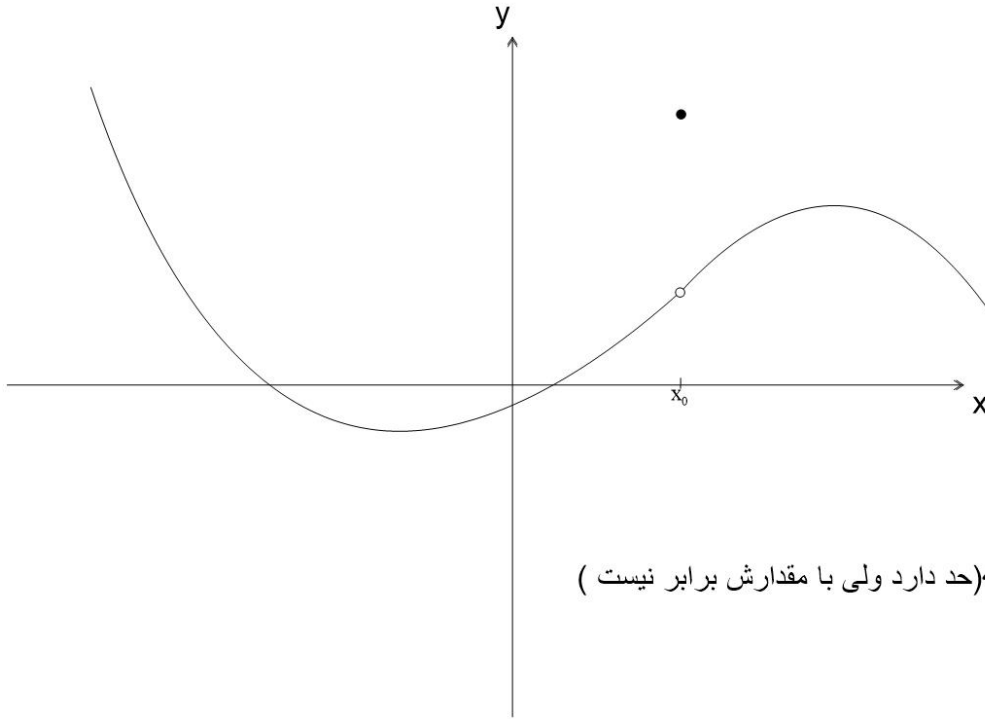
### پیوستگی تابع حقیقی:

اگر تابع  $f(x)$  در  $x = x_0$  حد و مقدار داشته باشد، و این دو مقدار با یکدیگر برابر باشند تابع در آن نقطه پیوسته است. برای داشتن حد باید حد چپ و راست موجود و با هم برابر باشند پس باید سه عبارت زیر موجود و با یکدیگر برابر باشند:

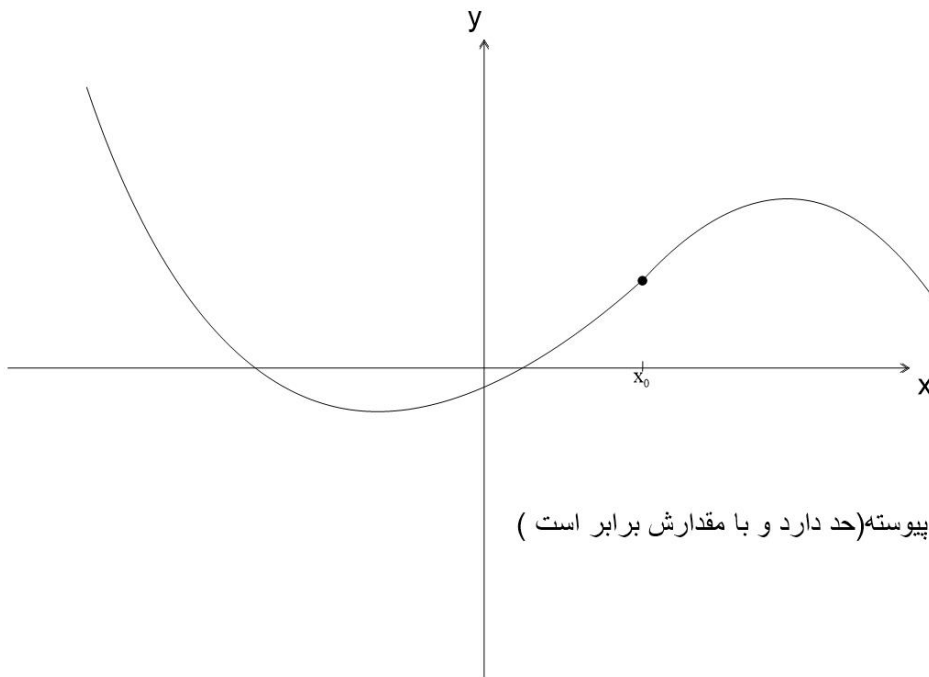
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

پیوستگی یک تابع در یک نقطه از لحاظ هندسی بدین معنی است که تابع در آن نقطه دارای پرش یا هرگونه ناپیوستگی نباشد:





ناپیوسته (حد دارد ولی با مقدارش برابر نیست)



پیوسته (حد دارد و با مقدارش برابر است)

برای بررسی پیوسته بودن توابع چندضابطه‌ای در نقاط شرطی، باید حد چپ و راست و مقدار تابع در نقاط شرطی بررسی و مساوی باشند.

مثال: پیوستگی تابع زیر را بررسی کنید

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ 4 & x = 2 \\ |x+2| & x > 2 \end{cases}$$

حل: ابتدا حد چپ و راست را در نقطه شرطی ( در این سوال  $x=2$  ) می‌یابیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} |x+2| = 4$$

حد چپ و راست در نقطه  $x=2$  با یکدیگر برابر و با مقدار تابع (ضابطه وسط) مساوی هستند.

مثال:  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که تابع زیر همه جا پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x \leq 2 \\ ax + b & 2 < x \leq 4 \\ |x+2| & x > 4 \end{cases}$$

حل: برای آنکه تابع همه جا پیوسته باشد باید در نقاط شرطی پیوسته باشد:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 4 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} ax + b = 2a + b \end{array} \right\} \Rightarrow 2a + b = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} ax + b = 4a + b \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} |x+2| = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 4a + b = 6$$

$$\Rightarrow a = 3, b = -6$$

نکته:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x] \sim \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x$  یعنی اگر داخل جزء صحیح به سمت بی نهایت میل کند، می توان جزء صحیح را حذف کرد.

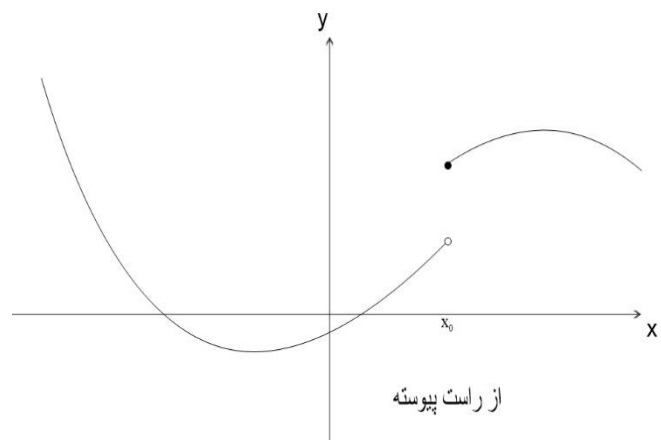
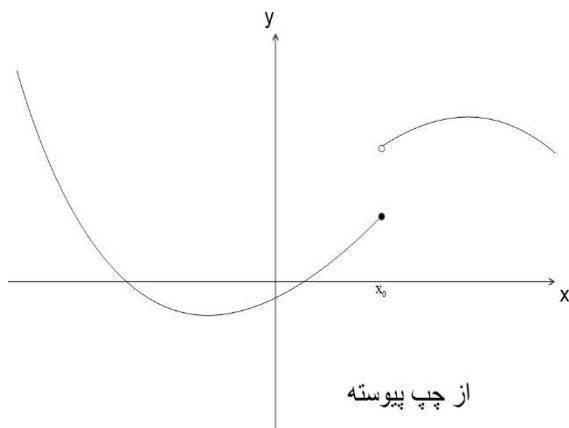
مثال: حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right]$  را بیابید.

حل: اگر  $x$  به سمت صفر میل کند  $\frac{1}{x}$  به سمت بی نهایت میل می کند پس می توان جزء صحیح را حذف کرد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x \times \frac{1}{x} = 1$$

### پیوستگی یک طرفه:

اگر مقدار تابع فقط با حد راست تابع برابر باشد در آن نقطه پیوستگی راست و اگر مقدار تابع فقط با حد چپ تابع برابر باشد در آن نقطه پیوستگی چپ دارد.



مثال: پیوستگی تابع زیر را در نقطه  $x=0$  بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \left[ \frac{x^2}{x} \right] & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \left[ \cos \frac{\pi}{2}(x+1) \right] & x > 0 \end{cases}$$

حل: حد چپ و راست را در  $x=0$  یافته و با مقدار تابع در این نقطه (شرط وسطی) مقایسه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{x^2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \varepsilon^+ \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \cos \frac{\pi}{2}(x+1) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \cos \frac{\pi^+}{2} \right] = \left[ \varepsilon^- \right] = -1$$

فقط حد چپ تابع با مقدار تابع در  $x=0$  برابر است پس تابع در این نقطه از چپ پیوسته است.

تمرین: پیوستگی تابع زیر را در نقطه  $x=1$  بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \left[ \frac{x-1}{x^2} \right] & x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ \left[ 1 + \sin \pi x \right] & x > 1 \end{cases}$$