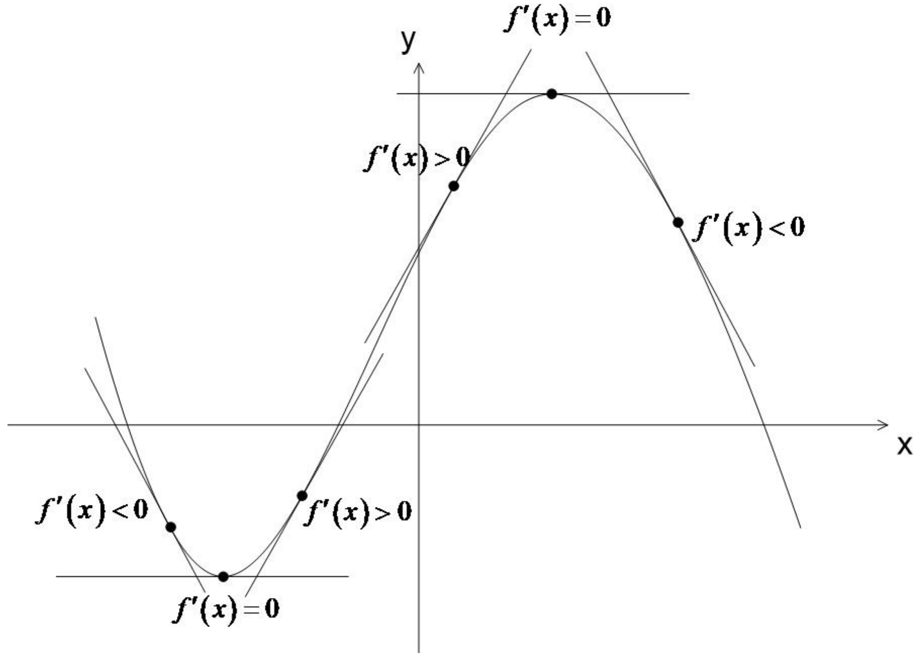
آزمون مشتق اول:

مطابق شکل زیر، اگر قبل از ریشه‌های $f'(x)$، مشتق منفی و بعد از آن مثبت باشد آن نقطه مینیمم (min) و اگر قبل از ریشه‌های $f'(x)$، مشتق مثبت و بعد از آن منفی باشد آن نقطه ماکزیمم (max) خواهد بود:



پس برای یافتن اکسترمم‌های تابع $f(x)$ کافیست ابتدا ریشه‌های $f'(x)=0$ را یافته سپس $f'(x)$ را تعیین علامت کنیم. جدول زیر برای تشخیص سریع‌تر نوع اکسترمم (max یا min) می‌تواند کمک کند:

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	max	↘

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	min	↗

نکته: اگر $f'(x)$ در اطراف نقطه بحرانی (نقطه‌ای که مشتق آن صفر است یا مشتق وجود ندارد) تغییر علامت ندهد، آن نقطه اکسترمم نیست مانند نقاط عطف که قبلاً نشان دادیم.

مثال: نقاط اکسترمم و نوع آنها را برای تابع $f(x)=2x^3+15x^2+36x-11$ بیابید.

حل: ابتدا از تابع مشتق گرفته و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم. سپس ریشه‌های بدست آمده را تعیین علامت می‌کنیم تا نوع نقاط اکسترمم را بیابیم:

$$f(x)=2x^3+15x^2+36x-11 \Rightarrow f'(x)=6x^2+30x+36=6\left(x^2+5x+6\right)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2+5x+6=0 \Rightarrow (x+2)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-3 \end{cases}$$

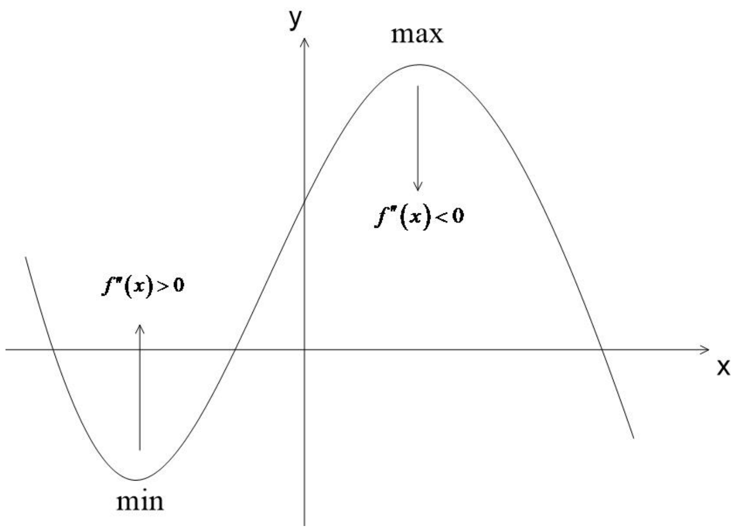
x		x=-3		x=-2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

پس $x=-3$ یک نقطه ماکزیمم و $x=-2$ یک نقطه مینیمم برای تابع $f(x)$ می‌باشند.

تمرین: نقاط اکسترمم و نوع آنها را برای تابع $f(x)=x^3-6x^2+9x+4$ بیابید.

آزمون مشتق دوم:

همانطور که در شکل زیر نشان داده شده است، در نقاط مینیمم ، تقعر رو به بالا ($f''(x)>0$) و در نقاط ماکزیمم، تقعر رو به پایین ($f''(x)<0$) می‌باشد:



پس آزمون مشتق دوم به صورت خلاصه این‌طور بیان می‌شود که در نقاط بحرانی:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} f''(x)<0 \rightarrow \max \\ f''(x)>0 \rightarrow \min \\ f''(x)=0 \rightarrow \text{آزمون بی‌نتیجه است} \end{cases}$$

یعنی در نقاطی که مشتق اول تابع صفر باشد، اگر مشتق دوم منفی باشد آن نقطه ماکزیمم نسبی و اگر مشتق دوم مثبت باشد آن نقطه مینیمم نسبی تابع است. این آزمون برای نقاطی که مشتق دوم صفر باشد سکوت می‌کند یعنی در این حالت ممکن است آن نقطه ماکزیمم یا مینیمم یا حتی نقطه عطف تابع باشد.

تمرین: به کمک آزمون مشتق دوم، نقاط اکسترمم و نوع آنها را برای تابع $f(x)=x^3+3x^2-9x-7$ بیابید.

حل: ابتدا نقاط بحرانی ($f'(x)=0$ یا مخرج $f'(x)$ مساوی صفر) تابع را یافته سپس با محاسبه $f''(x)$ در آن نقاط، به کمک آزمون مشتق دوم نوع نقاط اکسترمم را می‌یابیم:

$$f(x)=x^3+3x^2-9x-7 \Rightarrow f'(x)=3x^2+6x-9=3\left(x^2+2x-3\right)=0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \end{cases}$$

$$f''(x)=6x+6 \Rightarrow \begin{cases} f''(-3)=-18+6=-12 \\ f''(1)=6+6=12 \end{cases}$$

پس $x=-3$ نقطه ماکزیمم نسبی و $x=1$ نقطه مینیمم نسبی تابع است.

تمرین: به کمک آزمون مشتق دوم، نقاط اکسترمم و نوع آنها را برای تابع $f(x)=2x^3-3x^2-36x+5$ بیابید.