

## انتگرال توابع گنگ (غیر گویا):

برای محاسبه انتگرال توابع گنگ (توابع شامل رادیکال) با فرجه‌های دلخواه (مانند  $\sqrt[n_1]{x^{m_1}}$ ،  $\sqrt[n_2]{x^{m_2}}$  و...) از تغییر متغیر  $x = z^r$  استفاده می‌کنیم که  $r$  کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م.) فرجه‌های رادیکال‌ها است (می‌توانید از حاصل ضرب همه فرجه‌ها نیز استفاده کنید ولی محاسبات بعدی طولانی‌تر می‌شود).

مثال: حاصل انتگرال  $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx$  را بیابید.

حل: فرجه‌های رادیکال‌ها ۲ و ۳ است که ک.م.م. این دو برابر است با ۶:

$$x = z^6 \Rightarrow dx = 6z^5 dz$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx = \int \frac{\sqrt{z^6}}{\sqrt[3]{z^6+1}} 6z^5 dz = 6 \int \frac{z^3}{z^2+1} z^5 dz = 6 \int \frac{z^8}{z^2+1} dz$$

برای محاسبه این انتگرال از روش تجزیه کسر استفاده می‌کنیم. درجه صورت از درجه مخرج بیشتر است پس صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم. در صورتی که این روش را از یاد برده‌اید بهتر است آموزش روش تجزیه کسر برای حل انتگرال را در سایت مسیرفردا مجدداً مرور کنید تا انتگرال توابع گنگ را بتوانید حل کنید.

$$\begin{aligned} 6 \int \frac{z^8}{z^2+1} dz &= 6 \int \left( z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1} \right) dz = 6 \left( \frac{z^7}{7} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^3}{3} - z + \text{Arctan } z \right) + c \\ &= 6 \left( \frac{x^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} - x^{\frac{1}{6}} + \text{Arctan } x^{\frac{1}{6}} \right) + c \end{aligned}$$

تمرین: حاصل انتگرال توابع گنگ زیر را بیابید.

$$1. \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx$$

$$2. \int \frac{2+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x^5}} dx$$

$$3. \int \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x} - \sqrt{x}} dx$$