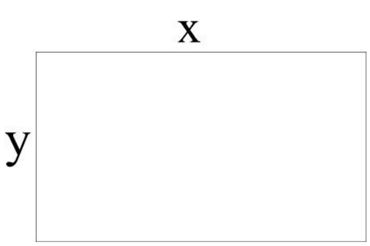
بهینه‌سازی:

هرگاه برای حل یک مسئله نیازمند اکسترمم کردن یک تابع بر حسب دو متغیر (مثلاً $f(x,y)=0$) باشیم، به کمک شرایط داده شده در مسئله، آن تابع را تبدیل به یک تابع تک‌متغیره می‌کنیم (یعنی از شرط داده شده، یک متغیر را بر حسب دیگری نوشته و در تابع جای‌گذاری می‌کنیم) سپس از تابع تک‌متغیره مشتق گرفته و اکسترمم‌های آن را می‌یابیم و مقدار تابع (یا مقدار خواسته شده در سوال) را در ریشه‌های قابل قبول محاسبه می‌کنیم.

مثال: طول یک طناب ۱۰۰ متر است. مساحت بزرگترین مستطیلی که می‌توان با این طناب ساخت چقدر است؟

حل: اگر مستطیل را به این شکل در نظر بگیریم:



محیط مستطیل به این صورت خواهد بود: $P=2(x+y)=100$

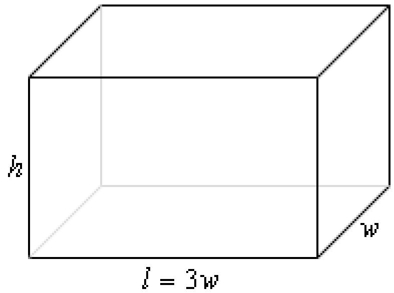
که از این رابطه و داده‌های مسئله میتوان نوشت: $x+y=50 \Rightarrow y=50-x$

برای حل این مسئله نیازمند اکسترمم کردن مساحت مستطیل یعنی $S=xy$ هستیم که فعلا نمی‌توان با مشتق‌گیری آن را اکسترمم کرد زیرا بر حسب دو متغیر x و y است ولی به کمک رابطه بدست آمده از محیط مستطیل یعنی $y=50-x$ می‌توان این تابع را فقط بر حسب یک متغیر یعنی x نوشته و با مشتق‌گیری، اکسترمم آن را یافت:

$$S = xy = x(50 - x) = 50x - x^2$$
$$\frac{dS}{dx} = 50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25$$
$$\Rightarrow S_{\max} = 25 \times (50 - 25) = 25 \times 25 = 625$$

یعنی مساحت بزرگترین مستطیل با محیط ۱۰۰ متر برابر است با ۶۲۵ مترمربع.

مثال: می‌خواهیم جعبه بسته‌بندی طراحی کنیم که طول آن سه برابر عرض آن باشد.



حجم این جعبه ۱۲ واحد می‌باشد. هزینه مواد به کاررفته در سطوح بالایی و پایینی جعبه ۱۰ تومان به ازای هر واحد سطح و ۷ تومان به ازای سطوح جانبی می‌باشد. ابعاد جعبه را طوری بیابید که هزینه ساخت جعبه حداقل شود.

حل: برای بهینه‌سازی این جعبه باید هزینه ساخت کل جعبه را با شرط معین بودن حجم جعبه حداقل کنیم:

$$V = lwh = (3w)wh = 3w^2h = 12 \Rightarrow h = \frac{4}{w^2}$$

هزینه ساخت یک جعبه کامل برابر است با:

$$S = 10(2lw) + 7(2hl + 2hw) = 10(6w^2) + 7(6hw + 2hw)$$
$$= 60w^2 + 65hw \overset{h=\frac{4}{w^2}}{=} 60w^2 + 65\left(\frac{4}{w^2}\right)w = 60w^2 + \frac{260}{w}$$

برای بهینه‌سازی S باید مشتق آن را مساوی قرار دهیم تا حداقل مقدار آن را که کمترین هزینه ساخت جعبه است بیابیم:

$$\frac{dS}{dw} = 120w - \frac{260}{w^2} = 0 \Rightarrow 120w = \frac{260}{w^2} \Rightarrow w^3 = \frac{260}{120} = \frac{13}{6}$$
$$\Rightarrow w = \sqrt[3]{\frac{13}{6}} \quad , \quad l = 3\sqrt[3]{\frac{13}{6}} \quad , \quad h = 4\sqrt[3]{\frac{36}{169}}$$

تمرین: مساحت بزرگترین مستطیلی که یک دو رأس آن روی محور xها و دو رأس دیگر آن بالای محور xها و روی منحنی تابع $y = 8 - x^2$ هستند، به کمک بهینه‌سازی چقدر است؟

(راهنمایی: از شکل زیر کمک بگیرید)