

## رسم نمودار:

برای رسم نمودار تابع  $f(x)$  ابتدا باید تمام مجانب‌های تابع را مطابق دستور گفته شده بیابیم، تابع باید در فاصله بسیار دور به این خطوط مماس شود. سپس از تابع مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم تا نقاط بحرانی ( $f'(x)=0$ ) را بیابیم. شیب خط مماس بر منحنی در این نقاط صفر است (یعنی خطی افقی و موازی محور  $x$  است).  $f'(x)$  را تعیین علامت می‌کنیم تا بازه‌های صعودی و نزولی تابع را بیابیم، سپس  $f''(x)$  را محاسبه می‌کنیم و مساوی صفر قرار می‌دهیم تا نقاط عطف را بیابیم.  $f''(x)$  را تعیین علامت می‌کنیم تا جهت تقعر تابع را در بازه‌های مختلف بیابیم. در نهایت مقدار تابع را در چند نقطه یافته و به کمک اطلاعات بالا، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

مثال: نمودار تابع  $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$  را رسم کنید.

حل: ابتدا مجانب‌های تابع را می‌یابیم:

$$\text{مجانب‌های قائم: } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{مجانب‌های افقی: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

تابع مجانب مایل ندارد زیرا در  $\pm\infty$  حد تابع یک عدد است.

حال مشتقات اول و دوم تابع را یافته، ریشه‌های آنها را محاسبه کرده و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x^2-1) - 2x(x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2} < 0 \rightarrow \text{شیب تابع همواره رو به پایین است}$$

## رسم نمودار

$$f'(x) = \frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2x(x^2-1)^2 - 2(2x)(x^2-1)(-1-x^2)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$f''(x) = \infty \Rightarrow \boxed{x=\pm 1}$$

$x$	$-\infty$	$x=-1$	$x=0$	$x=1$	$+\infty$
$f''(x)$	⤴	⊥	⤵	⊥	⤴
$f'(x)$	-	⊥	-	⊥	-
$f(x)$	↘	⊥	↘	⊥	↘

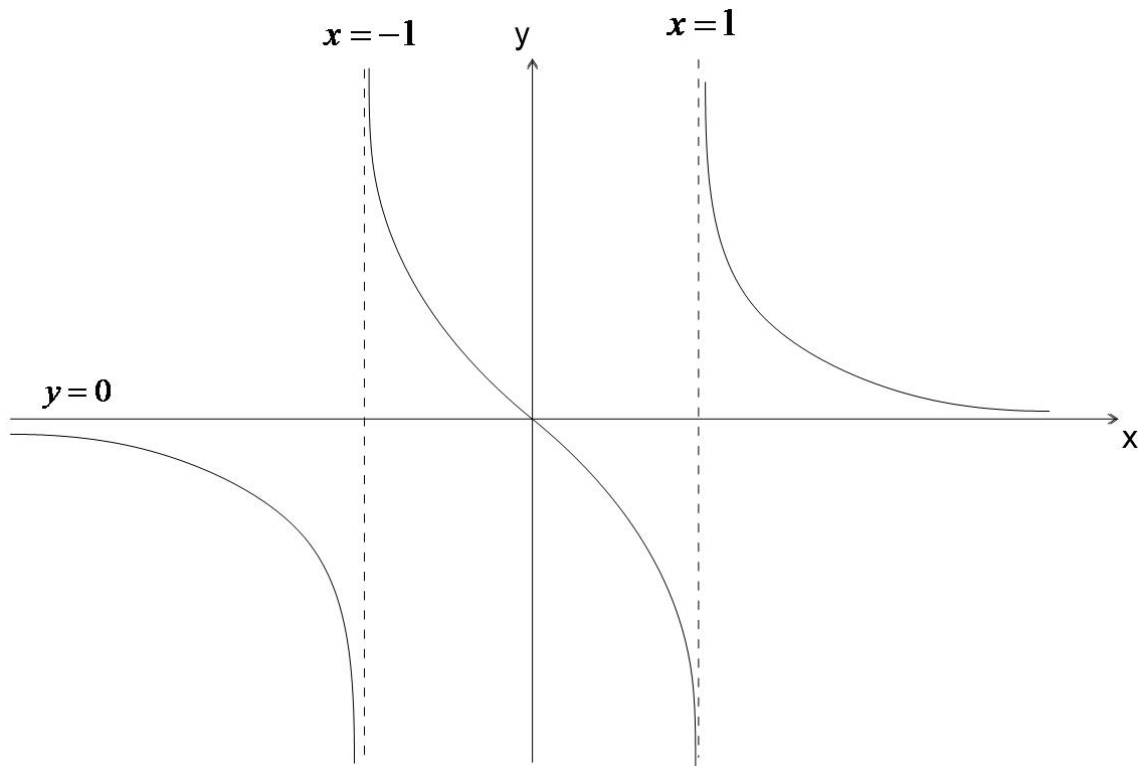
جدول تغییرات تابع را رسم می کنیم:

مقدار تابع در نقاط  $x=\pm 1$  تعریف

نشده است ولی داریم:  $f(0)=0$

اکنون می توانیم نمودار تابع را رسم کنیم. ابتدا خطوط مجانب را رسم کرده و سپس با

توجه به شیب تابع و جهت تقعر در هر بازه نمودار تابع را رسم می کنیم:



تمرین: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$1. f(x) = 3x^2 - 6x + 5$$

$$2. f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$$

$$3. f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$