## روش تجزیه کسر برای حل انتگرال:

برای محاسبه انتگرال‌های به فرم $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ که صورت و مخرج دو چند جمله‌ای بر حسب $x$ باشند از روش تجزیه کسرها استفاده می‌کنیم. این کسرها دو حالت کلی دارند:

حالت اول: درجه صورت بزرگتر یا مساوی درجه مخرج باشد

در این حالت ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم کرده و سپس از عبارت بدست آمده به راحتی انتگرال می‌گیریم.

نکته:

$$\boxed{\frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}} = \text{خارج قسمت} + \frac{\text{باقیمانده}}{\text{مخرج}}}$$

مثال: حاصل انتگرال $\int \frac{2x^2+3}{x^2-4}dx$ را بیابید.

صورت　　　مخرج

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+3 & x^2-4 \\ \underline{\mp 2x^2 \pm 8} & 2 \\ 11 & \end{array}$$

خارج قسمت

خارج قسمت

باقیمانده

$$\frac{2x^2+3}{x^2-4} = 2 + \frac{11}{x^2-4} \Rightarrow \int \frac{2x^2+3}{x^2-4}dx = \int\left(2+\frac{11}{x^2-4}\right)dx = 2x + \frac{11}{4}Ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)+c$$

تمرین: حاصل انتگرال $\int \frac{-3x^2+2}{x+9}dx$ را بیابید.

حالت دوم: درجه صورت کمتر از درجه مخرج باشد

در این حالت ابتدا مخرج را تا جای ممکن تجزیه می‌کنیم، سپس با توجه به نوع و توان عوامل ایجاد شده در مخرج که شامل ۴ حالت زیر می‌با شند مخرج را تجزیه و سپس انتگرال می‌گیریم.

۱: مخرج شامل عوامل درجه اول با توان ۱ مانند $(x-x_i)$ باشند:

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots}$$

۲: مخرج شامل عوامل درجه اول با توان دلخواه مانند $(x-x_i)^n$ باشند:

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)^n(x-x_2)^m\ldots}$$

۳: مخرج شـــامل عوامل درجه دوم مانند $ax^2+bx+c$ غیر قابل تجزیه $(\Delta<0)$ با توان ۱ باشند:

$$\frac{P(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\ldots}$$

۴: مخرج شـــامل عوامل درجه دوم مانند $(ax^2+bx+c)^n$ غیر قابل تجزیه ( $\Delta<0$) با توان دلخواه باشند:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

برای تجزیه این نوع کسرها در هر حالت، به روش زیر عمل می‌کنیم:

حالت ۱: کسر را به صورت حاصل جمع چند کسر با مخرج‌های جداگانه و صورت نامعلوم (مانند $A$، $B$و...) می‌نویسیم (مثلاً $\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+...$) و سپس مخرج مشترک می‌گیریم. با مساوی قرار دادن عبارت به دست با عبارت اولیه، اعداد ثابت را یافته و انتگرال کسرهای جدید را محاسبه می‌کنیم.

مثال:

$$\int \frac{8}{x^2-4}dx$$

حل: ابتدا مخرج را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{8}{x^2-4}=\frac{8}{(x-2)(x+2)}$$

مخرج از نوع حالت ۱ است پس کسر را به صورت گفته شده بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{8}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{Ax+2A+Bx-2B}{(x-2)(x+2)}=\frac{x(A+B)+(2A-2B)}{(x-2)(x+2)}$$

حال دو عبارت سمت چپ و راست را با هم مساوی قرار می‌دهیم تا $A$ و $B$ را بیابیم:

$$\frac{8}{(x-2)(x+2)}=\frac{x(A+B)+(2A-2B)}{(x-2)(x+2)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\2A-2B=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\A-B=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{8}{x^2-4}=\frac{2}{(x-2)}+\frac{-2}{(x+2)}$$

حال به جای $\frac{8}{x^2-4}$ از معادل آن یعنی $\frac{2}{(x-2)}+\frac{-2}{(x+2)}$ انتگرال می‌گیریم:

$$\Rightarrow \int \frac{8}{x^2-4}dx = \int [\frac{2}{(x-2)} + \frac{-2}{(x+2)}]dx = 2Ln|x-2| - 2Ln|x+2| + c = 2Ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$$

حالت ۲: مشابه حالت قبل، کسر را به صورت حاصل جمع چند کسر با مخرج‌های جداگانه و صورت نامعلوم (مانند $A$، $B$و...) می‌نویسیم ولی کسرهایی که مخرج آن توا ندار دارند را از توان ۱ تا توان مورد نظر می‌نویسیم (مثلاً $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} + ...$) و سپس مخرج م شترک می‌گیریم. با م ساوی قرار دادن عبارت به د ست با عبارت اولیه، اعداد ثابت را یافته و انتگرال کسرهای جدید را محاسبه می‌کنیم.

مثال:

$$\int \frac{x}{x^2-4x+4}dx$$

حل: ابتدا مخرج را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{x}{x^2-4x+4} = \frac{x}{(x-2)^2}$$

مخرج از نوع حالت ۲ است پس کسر را به صورت گفته شده بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{x}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2} = \frac{Ax + (-2A+B)}{(x-2)^2}$$

حال دو عبارت سمت چپ و راست را با هم مساوی قرار می‌دهیم تا $A$ و $B$ را بیابیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ -2A+B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(x-2)^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}$$

حال به جای $\frac{x}{x^2-4x+4}$ از معادل آن یعنی $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}$ انتگرال می‌گیریم:

$$\Rightarrow \int \frac{x}{(x-2)^2}dx=\int [\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}]dx=Ln|x-2|+\int 2(x-2)^{-2}dx$$
$$=Ln|x-2|+2\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+c=Ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+c$$

حالت ۳: مشابه حالت ۱، کسر را به صورت حاصل جمع چند کسر با مخرج‌های جداگانه و صورت نامعلوم ولی در این حالت از درجه ۱ (مانند $A_1x+B_1$ ،$A_2x+B_2$ و...) می‌نویسیم (مثلاً $\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+$...) و سپس مخرج مشترک می‌گیریم. با مساوی قرار دادن عبارت به دست با عبارت اولیه، اعداد ثابت را یافته و انتگرال کسرهای جدید را محاسبه می‌کنیم.

مثال:

$$\int \frac{5x^2+8}{x^4+5x^2+4}dx$$

حل: ابتدا مخرج را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{5x^2+8}{x^4+5x^2+4}=\frac{5x^2+8}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

مخرج از نوع حالت ۳ است پس کسر را به صورت گفته شده بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{5x^2+8}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}=\frac{(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

$$=\frac{Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+Cx+Dx^2+D}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

$$=\frac{x^3(A+C)+x^2(B+D)+x(4A+C)+(4B+D)}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+C=0\\B+D=5\\4A+C=0\\4B+D=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\C=0\\B=1\\D=4\end{cases}$$

$$\frac{5x^2+8}{x^4+5x^2+4}=\frac{1}{x^2+1}+\frac{4}{x^2+4}$$

حال به جای $\frac{5x^2+8}{x^4+5x^2+4}$ از معادل آن یعنی $\frac{1}{x^2+1}+\frac{4}{x^2+4}$ انتگرال می‌گیریم:

$$\int\frac{5x^2+8}{x^4+5x^2+4}dx=\int[\frac{1}{x^2+1}+\frac{4}{x^2+4}]dx=\mathrm{Arctan}\,x+2\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

حالت ۴: این حالت ترکیبی از حالات ۲ و۳ است، کسر را به صورت حاصل جمع چند کسر با مخرج‌های جداگانه و صورت نامعلوم از درجه ۱ (مانند $A_1x+B_1$، $A_2x+B_2$ و...) می‌نویسیم و مخرج‌های توان‌دار را از توان ۱ تا توان مورد نظر می‌نویسیم (مثلاً $\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}+\ldots$) و سپس مخرج مشترک می‌گیریم. با مساوی قرار دادن عبارت به دست با عبارت اولیه، اعداد ثابت را یافته و انتگرال کسرهای جدید را محاسبه می‌کنیم.

نکته: از این حالت به دلیل سخت بودن معمولاً کمتر سوال داده می‌شود!

مثال:

$$\int \frac{4x^2+2x+4}{x^4+2x^2+1}dx$$

حل: ابتدا مخرج را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{4x^2+2x+4}{x^4+2x^2+1}=\frac{4x^2+2x+4}{\left(x^2+1\right)^2}$$

مخرج از نوع حالت ۴ است پس کسر را به صورت گفته شده بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{4x^2+2x+4}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{(Ax+B)\left(x^2+1\right)+Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{Ax^3+Bx^2+x(A+C)+(B+D)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=0\\B=4\\A+C=2\\B+D=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\B=4\\C=2\\D=0\end{cases}$$

$$\frac{4x^2+2x+4}{x^4+2x^2+1}=\frac{4}{x^2+1}+\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

حال به جای $\frac{4x^2+2x+4}{x^4+2x^2+1}$ از معادل آن یعنی $\frac{4}{x^2+1}+\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$ انتگرال می‌گیریم:

$$\int \frac{4x^2+2x+4}{x^4+2x^2+1}dx=\int\left[\frac{4}{x^2+1}+\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right]dx \overset{\substack{x^2+1=z\\2xdx=dz}}{=} 4\operatorname{Arctan}x+\int\frac{2dz}{z^2}=4\operatorname{Arctan}x+\int 2z^{-2}dz$$

$$=4\operatorname{Arctan}x+\frac{2z^{-1}}{-1}+c=4\operatorname{Arctan}x-\frac{2}{z}+c=4\operatorname{Arctan}x-\frac{2}{x^2+1}+c$$

نکته: برای حل انتگرال برخی کسرها ممکن است از ۲ حالت مختلف نیز استفاده کنیم. در این حالت، هر کسر را مطابق روش خود جایگذاری میکنیم.

مثال:

$$\int \frac{x+3}{x^3+x}dx$$

حل:

$$\frac{x+3}{x^3+x}=\frac{x+3}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)x}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x\left(x^2+1\right)}$$

$$=\frac{x^2\left(A+B\right)+Cx+A}{x\left(x^2+1\right)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\C=1\\A=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=3\\B=-3\\C=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{x+3}{x^3+x}=\frac{3}{x}+\frac{-3x+1}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow\int\frac{x+3}{x^3+x}dx=\int\left[\frac{3}{x}+\frac{-3x+1}{x^2+1}\right]dx=\int\left[\frac{3}{x}-3\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right]dx=3Lnx-\frac{3}{2}Ln\left(x^2+1\right)+\text{Arctan}\,x+c$$