روش تغییر متغیر برای حل انتگرال‌ها:

اگر تابع زیر انتگرال پیچیده‌تر از توابع اصلی باشد، باید به کمک روش‌های انتگرال‌گیری، حاصل انتگرال را ساده کرده و سپس با فرمول‌های داده شده، جواب انتگرال را بیابیم. یکی از روش‌های انتگرال‌گیری، روش تغییر متغیر است. اگر در تابع زیر انتگرال بتوانیم قسمتی را بیابیم که مشتق آن قسمت (یا حتی ضریبی از مشتق آن) در dx ضرب شده باشد، آن قسمت را متغیر جدیدی مثلاً t در نظر گرفته و با دیفرانسیل‌گیری، انتگرال را ساده می‌کنیم. پس از حل کردن انتگرال، جواب را بر حسب x بازنویسی می‌کنیم.

یادآوری:

(پارامتر) d × مشتق تابع = دیفرانسیل تابع

مثلاً دیفرانسیل t (یعنی dt) در تابع زیر به این شکل به دست می‌آید:

$$t = x^2 + 3\sin x - 1 \Rightarrow dt = \left(2x + 3\cos x\right)dx$$

مثال: حاصل انتگرال $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ را بیابید.

حل: مشتق عبارت x^2+1 در صورت وجود دارد و در dx ضرب شده است پس با تغییرمتغیر $t = x^2+1$ انتگرال را حل می‌کنیم:

$$t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2xdx$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int \frac{dt}{t} = Lnt + c = Ln\left(x^2+1\right) + c$$

مثال: حاصل انتگرال $\int \frac{Lnx}{x}dx$ را بیابید.

حل: مشتق عبارت Lnx یعنی $\frac{1}{x}$ در dx ضرب شده است پس با تغییرمتغیر $t=Lnx$ انتگرال را حل می‌کنیم:

$$t=Lnx \Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{Lnx}{x}dx=\int Lnx\times\frac{1}{x}dx=\int t\times dt=\frac{t^2}{2}+c=\frac{(Lnx)^2}{2}+c$$

مثال: حاصل انتگرال $\int x^2\sqrt{2x^3-5}dx$ را بیابید.

حل: مشتق عبارت $2x^3-5$ برابر است با $6x^2$ که ضریبی از آن در dx ضرب شده است پس با تغییرمتغیر $t=2x^3-5$ انتگرال را حل می‌کنیم:

$$t=2x^3-5 \Rightarrow dt=6x^2dx \Rightarrow \frac{dt}{6}=x^2dx$$

$$\int x^2\sqrt{2x^3-5}dx=\int\sqrt{t}\times\frac{dt}{6}=\frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}}\times dt=\frac{1}{6}\times\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{9}t^{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{9}\left(2x^3-5\right)^{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{9}\sqrt{\left(2x^3-5\right)^3}+c$$

نکته۱: هرگاه ضریبی از مشتق یک عبارت در dx ضرب شده باشد، ضریب مورد نظر را به سمت dt منتقل کرده و عیناً عبارت داخل انتگرال را تشکیل می‌دهیم تا جایگذاری را انجام دهیم.

نکته۲: برای محاسبه انتگرال زمانی که x زیر رادیکال است، عبارت داده شده را به صورت توانی می‌نویسیم:

$$\int \sqrt[n]{x^m}\,dx = \int x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$$

مثال: حاصل انتگرال $\int (12x+8)(3x^2+4x-6)^5\,dx$ را بیابید.

حل: مشتق عبارت $(3x^2+4x-6)$ برابر است با $(6x+4)$ که ضریبی از آن (یعنی $(12x+8)$) در dx ضرب شده است پس با تغییرمتغیر $t=3x^2+4x-6$ انتگرال را حل می‌کنیم:

$$t=3x^2+4x-6 \Rightarrow dt=(6x+4)\,dx \Rightarrow 2dt=(12x+8)\,dx$$

$$\int (12x+8)(3x^2+4x-6)^5\,dx = \int (3x^2+4x-6)^5 \times (12x+8)\,dx =$$

$$= \int t^5 \times 2dt = 2\frac{t^6}{6} + c = \frac{1}{3}(3x^2+4x-6)^6 + c$$

تمرین: حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

1. $\int 2x(x^2-5)^{13}\,dx$
2. $\int \frac{7x}{\sqrt{x^2-3}}\,dx$
3. $\int \frac{1}{(3x-7)^5}\,dx$
4. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
5. $\int (\sin x)e^{\cos x}\,dx$

6. $\int_1^{e^3} \frac{Ln\sqrt{x}}{x}dx$

نکته: انتگرال توابعی که شامل عبارات رادیکالی زیر باشند، با تغییر متغیر مثلثاتی مناسب قابل حل هستند:

عبارت رادیکالی	تغییر متغیر مناسب
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan\theta$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta$

درحل این نوع مسائل باید به یاد داشته باشیم که: $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ و $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

مثال: انتگرال $\int x^3\sqrt{4-x^2}dx$ را حل کنید.

حل: مطابق جدول بالا باید از تغییر متغیر $x=2\sin\theta$ استفاده کنیم:

$$x=2\sin\theta \Rightarrow dx=2\cos\theta d\theta$$

$$\int x^3\sqrt{4-x^2}dx=\int(2\sin\theta)^3\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}\,2\cos\theta d\theta=\int 8\sin^3\theta\sqrt{4-4\sin^2\theta}\,2\cos\theta d\theta$$
$$=16\int\sin^3\theta\sqrt{4\cos^2\theta}\cos\theta d\theta=16\int\sin^3\theta\times2\cos\theta\times\cos\theta d\theta=32\int\sin^3\theta\cos^2\theta d\theta$$
$$=32\int\sin^2\theta\cos^2\theta\sin\theta d\theta=32\int(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta\sin\theta d\theta$$

برای حل انتگرال بدست آمده باید از تغییر متغیر $t=\cos\theta$ استفاده کنیم زیرا ضریبی از مشتق آن در $d\theta$ ضرب شده است:

$$t=\cos\theta \Rightarrow dt=-\sin\theta d\theta \Rightarrow -dt=\sin\theta d\theta$$

$$32\int\left(1-\cos^2\theta\right)\cos^2\theta\sin\theta d\theta=32\int\left(1-t^2\right)t^2\left(-dt\right)=32\int\left(t^4-t^2\right)dt$$
$$=32\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)+c=32\left(\frac{\cos^5\theta}{5}-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)+c$$

و در نهایت جواب بدست آمده را بر حسب x بازنویسی می‌کنیم:

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}=\frac{1}{2}\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$32\left(\frac{\cos^5\theta}{5}-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)+c=32\left(\frac{1}{5}\frac{1}{32}\left(4-x^2\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}\frac{1}{8}\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)+c=\boxed{\frac{1}{5}\left(4-x^2\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+c}$$

مثال: حاصل انتگرال $\int_0^3\sqrt{x^2+6x}dx$ را بیابید.

حل: ابتدا عبارت زیر رادیکال را مربع کامل می‌کنیم:

$$x^2+6x=x^2+6x+9-9=\left(x+3\right)^2-9$$

$$\int_0^3\sqrt{x^2+6x}dx=\int_0^3\sqrt{\left(x+3\right)^2-9}dx$$

سپس برای اینکه عبارت زیر رادیکال به عبارت مشابه در جدول فوق تبدیل شود از تغییر متغیر $t=x+3$ استفاده می‌کنیم:

$$t=x+3\Rightarrow dt=dx$$
$$\int_{x=0}^3\sqrt{\left(x+3\right)^2-9}dx=\int_{t=3}^6\sqrt{t^2-9}dt$$

توجه کنید که با تغییر متغیر در انتگرال معین، باید کران‌ها نیز تغییر یابند و بر حسب متغیر جدید نوشته شوند. عبارت زیر رادیکال مشابه عبارت سوم جدول ذکر شده است پس داریم:

$$t=3\sec\theta \Rightarrow dt=3\sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$\begin{cases} t=3 \Rightarrow \sec\theta=1 \Rightarrow \cos\theta=1 \Rightarrow \theta=0 \\ t=6 \Rightarrow \sec\theta=2 \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\int_{t=3}^{6}\sqrt{t^2-9}dt=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{(3\sec\theta)^2-9}\times 3\sec\theta\tan\theta d\theta=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{9\sec^2\theta-9}\times 3\sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$=9\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\sec^2\theta-1}\sec\theta\tan\theta d\theta=9\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\tan^2\theta}\sec\theta\tan\theta d\theta=9\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\sec\theta\tan^2\theta d\theta$$

$$=9\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\sec\theta\left(\sec^2\theta-1\right)d\theta=9\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sec^3\theta-\sec\theta\right)d\theta=9\left[\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\sec^3\theta d\theta-\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\sec\theta d\theta\right]$$

$$=9\left[\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\sec^3\theta d\theta-\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\sec\theta d\theta\right]=9\left[\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta+\frac{1}{2}Ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|-Ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=9\left[\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta-\frac{1}{2}Ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=9\left[\left(\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}-\frac{1}{2}Ln\left|2+\sqrt{3}\right|\right)-\left(0-\frac{1}{2}Ln\left|1\right|\right)\right]$$

$$=9\left[\sqrt{3}-\frac{1}{2}Ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right]$$

برای محاسبه انتگرال فوق از رابطه بازگشتی زیر کمک گرفتیم:

$$\int\sec^n xdx=\frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\tan x+\frac{n-2}{n-1}\int\sec^{n-2}xdx$$

$$n=3\Rightarrow\int\sec^3 xdx=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\int\sec xdx$$

تمرین: حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x^2+9\right)^2}$

2. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x-x^2}}$

4. $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{e^{2x}-9}}$

نکته: برای محاسبه انتگرال توابعی که فقط بر حسب $\sin x$ و $\cos x$ باشند از تغییر متغیر $u=\tan\frac{x}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$u=\tan\frac{x}{2} \Rightarrow du=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\left(1+u^2\right)dx \Rightarrow \boxed{dx=\frac{2du}{1+u^2}}$$

$$\boxed{\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2}} \quad , \quad \boxed{\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2}}$$

نکته: اگر توان $\sin x$ و $\cos x$ زوج باشد می‌توان از تغییر متغیر $u=\tan x$ نیز استفاده کرد.

مثال: حاصل انتگرال $\int \frac{dx}{\cos x+\sin x+1}$ را بیابید.

حل: تابع زیر انتگرال فقط بر حسب $\sin x$ و $\cos x$ است پس می‌توانیم از تغییر متغیر ذکر شده استفاده کنیم:

$$\int \frac{dx}{\cos x+\sin x+1}=\int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^2}+1}=\int \frac{2du}{1-u^2+2u+1+u^2}=\int \frac{2du}{2u+2}=\int \frac{du}{u+1}$$

$$=Ln\left|u+1\right|+c=Ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|+c$$

تمرین: حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

1. $\int \frac{(\cos x+\sin x)\,dx}{\sin 2x}$ (راهنمایی: $\sin 2x=2\sin x\cos x$)
2. $\int \frac{dx}{2\cos x+3\sin x+2}$

نکته: برای محاسبه انتگرال توابعی که فقط بر حسب $\tan x$ باشند از تغییر متغیر $u=\tan x$ استفاده می‌کنیم:

$$u=\tan x\Rightarrow du=\left(1+\tan^2 x\right)dx=\left(1+u^2\right)dx\Rightarrow \boxed{dx=\frac{du}{1+u^2}}$$

مثال: حاصل انتگرال $\int \tan^2 x\,dx$ را بیابید.

حل:

$$\int \tan^2 x\,dx=\int u^2\frac{du}{1+u^2}=\int \frac{u^2+1-1}{1+u^2}du=\int\left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)du=u-\operatorname{Arctan}u+c=\underline{\tan x-x+c}$$

تمرین: حاصل انتگرال $\int \tan x\,dx$ را بیابید.