روش جزء به جزء:

روش جزء به جزء برای حل انتگرال‌هایی به کار می‌رود که از حاصل ضرب دو تابع، یکی به راحتی انتگرال‌پذیر و دیگری به راحتی مشتق‌پذیر تشکیل شده باشد. روش جزء به جزء به دو روش قابل اجراست که عموماً روش اول تدریس می‌گردد و روش دوم با وجود اینکه برای حالات خاص جزء به جزء قابل استفاده است، ولی ساده‌تر از روش اول بوده و سریع‌تر به جواب می‌رسد و اکثراً تدریس نمی شود. لذا قبل از استفاده از روش دوم (به نام روش جدولی) حتماً در مورد اجازه استفاده از آن در امتحان، از استاد خود سؤال نمایید.

الف-روش مستقیم: این روش برای تمام حالات انتگرال‌گیری جزء به جزء قابل استفاده است و با وجود اینکه برخی مواقع بسیار وقت‌گیر است ولی همواره به جواب می‌رسد.

از مبحث مشتق به یاد داریم که مشتق حاصل‌ضرب دو تابع برابر است با مجموع حاصل‌ضرب هر تابع در مشتق تابع دیگر:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

در واقع به زبان ساده‌تر داریم:

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

حال با ضرب کردن طرفین در dx داریم:

$$d(uv) = vdu + udv$$

با انتگرال‌گیری از طرفین، داریم:

$$uv = \int vdu + \int udv$$

و در نتیجه:

فرمول اصلی جزء به جزء: $\int udv = uv - \int vdu$

در اینجا انتگرالی که می‌خواهیم جواب آن را به دست آوریم $\int udv$ است.
گفتیم که انتگرال جزء به جزء حاصل‌ضرب دو تابع، یکی به راحتی انتگرال‌پذیر و دیگری به راحتی مشتق‌پذیر است. اصولاً تابع به راحتی مشتق‌پذیر را u و تابع دیگر به همراه dx را dv می‌نامیم.
ولی برای تشخیص ساده‌تر u اولویت‌های زیر را به ترتیب در نظر بگیرید:

1- توابع لگاریتمی (مانند $Ln(x)$ ، $Log(x)$ و ...)

2- توابع معکوس مثلثاتی (مانند $\mathrm{Arctan}(x)$ ، $\mathrm{Arcsin}(x)$ و ...)

3- توابع چندجمله‌ای (مانند $x^2 + x$ ، $x^3 + 1$ و...)

4- توابع مثلثاتی و نمایی (مانند e^{4x} ، $\mathrm{Sin}(2x)$ ، $\mathrm{Cos}(5x)$ و ... که اولویت یکسانی دارند و اگر هم‌زمان دو تابع از این توابع در انتگرال حضور داشته باشند مهم نیست کدام را u بگیریم و در هر صورت جواب یکسانی به دست می‌آید)

برای مرتب شــدن حل انتگرال بهتر اســت u و dv را در کنار هم بنویســیم و سپس از u دیفرانسیل و از dv انتگرال بگیریم:

$$\begin{cases} u \Rightarrow du \\ dv \Rightarrow v \end{cases}$$

منظور از دیفرانسیل، مشتق عبارتی که u فرض شده ضربدر dx است.

به طور مثال اگر $u = x^3$ باشد، دیفرانسیل u برابر است با: $du = 3x^2 dx$

با جایگذاری du و v در $\int u dv = uv - \int v du$ و انتگرال‌گیری از عبارت دوم، جواب انتگرال به دست می‌آید.

مثال ۱: انتگرال $\int x\, e^{-3x}\, dx$ را حل کنید.

حل: ملاحظه می‌کنید که توابع x و e^{-3x} هر دو به راحتی مشتق‌پذیر و انتگرال‌پذیر هستند. ولی با توجه به اینکه اولویت چندجمله‌ای‌ها بالاتر از توابع نمایی است پس x را u و e^{-3x} به همراه dx را dv در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = 1 \times dx \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-3x} dx \Rightarrow v = -\dfrac{1}{3} e^{-3x} \end{cases}$$

با جایگذاری در فرمول اصلی جزء به جزء، داریم:

$$\overbrace{\int x e^{-3x}\, dx}^{\int u dv} = \overbrace{x\left(-\tfrac{1}{3} e^{-3x}\right)}^{uv} - \overbrace{\int \left(-\tfrac{1}{3} e^{-3x}\right)\, dx}^{\int v du}$$
$$= -\tfrac{1}{3} x e^{-3x} - \tfrac{1}{9} e^{-3x} + c$$

تمرین: حاصل انتگرال‌های زیر را به روش مستقیم جزء به جزء حل کنید

1. $\int xLn(x)\,dx$
2. $\int (x^3+3x^2)Ln(x)\,dx$
3. $\int x^n Ln(x)\,dx$
4. $\int Ln(x)\,dx$ (راهنمایی: $u=Ln(x)$)
5. $\int x\,\mathrm{Sin}(x)\,dx$
6. $\int x\,\mathrm{Cos}(4x)\,dx$
7. $\int \frac{Ln(x)}{x^{60}}\,dx$
8. $\int \mathrm{Arcsin}(3x)\,dx$
9. $\int \mathrm{Sin}(\sqrt{x})\,dx$ (راهنمایی: ابتدا تغییرمتغیر $u=\sqrt{x}$ را انجام دهید)

برخی مواقع باید بیش از یک بار جزء به جزء بگیریم که در این حالت انتگرال‌گیری مراحل بعدی فرقی با مرحله اول ندارند. فقط باید جواب انتگرال‌ها را در جای درست خود جایگذاری کنیم که بهتر است برای جلوگیری از اشتباه در جایگذاری، انتگرال‌های مراحل بعدی را جداگانه محاسبه و سپس در فرمول اولیه جایگذاری کنید.

مثال۲: انتگرال $\int x^2 e^{-3x}\,dx$ را حل کنید.

حل: مرحله اول مشابه مثال قبل است:

$$\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^{-3x} dx \Rightarrow v = -\dfrac{1}{3} e^{-3x} \end{cases}$$

اکنون با جایگذاری در فرمول اصلی جزء به جزء، داریم:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-3x}\,dx &= x^2\left(-\tfrac{1}{3}e^{-3x}\right) - \int \left(-\tfrac{1}{3}e^{-3x}\right) 2x\,dx \\ &= -\tfrac{1}{3}x^2 e^{-3x} + \tfrac{2}{3}\int x e^{-3x}\,dx \end{aligned}$$

حال در این مرحله به انتگرال $\int x\, e^{-3x}\,dx$ می‌رسیم که باید به روش جزء به جزء حل شود. البته ما جواب این انتگرال را در مثال قبل یافتیم پس مستقیماً در این انتگرال قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-3x}\,dx &= -\tfrac{1}{3}x^2 e^{-3x} + \tfrac{2}{3}\int x e^{-3x}\,dx \\ &= -\tfrac{1}{3}x^2 e^{-3x} + \tfrac{2}{3}\left[-\tfrac{1}{3}x e^{-3x} - \tfrac{1}{9}e^{-3x}\right] + c \\ &= -\tfrac{1}{3}x^2 e^{-3x} - \tfrac{2}{9}x e^{-3x} - \tfrac{2}{27}e^{-3x} + c \\ &= -\tfrac{1}{27}e^{-3x}\left(9x^2 + 6x + 2\right) + c \end{aligned}$$

البته خط آخر، فقط فاکتورگیری است و انجام آن ضروری نیست.

تمرین: حاصل انتگرال‌های زیر را به روش مستقیم جزء به جزء حل کنید

1) $\int (x^2+2x-3)\,\mathrm{Sin}(x)\,dx$

2) $\int 4x^2\,\mathrm{Cos}(2x)\,dx$

3) $\int (6x^2-3x+5)e^{6x}\,dx$

برخی مواقع پس از دو بار انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء، به ضریبی از انتگرال اولیه می‌رسیم و احتمال می‌دهیم اشتباه حل کرده باشیم! اشتباهی رخ نداده و شما با بردن آن قسمت به سمت چپ (سمت روی سؤال) و ساده‌سازی، جواب را به دست می‌آورید. این حالت اکثراً زمانی رخ می‌دهد که بخواهیم از حاصل‌ضرب یک تابع نمایی در یک تابع مثلثاتی انتگرال جزء به جزء بگیریم.

مثال۳: حاصل انتگرال $\int \cos(2x)e^{3x}\,dx$ را بیابید.

حل: با توجه به اینکه اولویت توابع مثلثاتی و نمایی یکسان است، فرقی نمی‌کند کدامیک را u در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} u=\cos(2x)\Rightarrow du=-2\sin(2x)dx \\ dv=e^{3x}dx\Rightarrow v=\dfrac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$$

اکنون با جایگذاری در فرمول اصلی جزء به جزء، داریم:

$$\int \cos(2x)e^{3x}\,dx =$$
$$\cos(2x)(\frac{1}{3}e^{3x}) - \int (\frac{1}{3}e^{3x})(-2\sin(2x)dx) = \cos(2x)(\frac{1}{3}e^{3x}) + \frac{2}{3}\int \sin(2x)e^{3x}\,dx \qquad (1)$$

حال انتگرال $\int \sin(2x)e^{3x}\,dx$ را نیز به همین روش حل می‌کنیم. توجه کنید که در قســـمت قبل u را $\cos(2x)$ در نظر گرفتیم پس این بار u را $\sin(2x)$ در نظر می‌گیریم وگرنه انتگرال به جواب بدیهی که روی سؤال است می‌رسد. پس داریم:

$$\begin{cases} u = \sin(2x) \Rightarrow du = 2\cos(2x)dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$$

و در نتیجه:

$$\int \sin(2x)e^{3x}\,dx =$$
$$\sin(2x)(\frac{1}{3}e^{3x}) - \int (\frac{1}{3}e^{3x})(2\cos(2x)dx) = \sin(2x)(\frac{1}{3}e^{3x}) - \frac{2}{3}\int \cos(2x)e^{3x}\,dx$$

حال این جواب را در (۱) قرار می‌دهیم:

$$\int \cos(2x)e^{3x}\,dx = \cos(2x)(\frac{1}{3}e^{3x}) + \frac{2}{3}\left[\sin(2x)(\frac{1}{3}e^{3x}) - \frac{2}{3}\int \cos(2x)e^{3x}\,dx\right] =$$
$$\cos(2x)(\frac{1}{3}e^{3x}) + \frac{2}{3}\sin(2x)(\frac{1}{3}e^{3x}) - \frac{4}{9}\int \cos(2x)e^{3x}\,dx$$

می‌بینیم که در جواب بدست آمده خود انتگرال اولیه یعنی $\int \cos(2x)e^{3x}\,dx$ نیز حضور دارد. با انتقال این قسمت به سمت چپ، فاکتورگیری و تقسیم طرفین بر ضریب انتگرال سمت چپ جواب بدست می‌آید:

$$\int \cos(2x)e^{3x}\,dx + \frac{4}{9}\int \cos(2x)e^{3x}\,dx = \cos(2x)(\frac{1}{3}e^{3x}) + \frac{2}{3}\sin(2x)(\frac{1}{3}e^{3x})$$

$$\Rightarrow \frac{13}{9}\int \cos(2x)e^{3x}\,dx = \cos(2x)(\frac{1}{3}e^{3x}) + \frac{2}{3}\sin(2x)(\frac{1}{3}e^{3x})$$

$$\Rightarrow \int \cos(2x)e^{3x}\,dx = \frac{3}{13}\cos(2x)\times e^{3x} + \frac{2}{13}\sin(2x)\times e^{3x} + c = \frac{1}{13}e^{3x}(3\cos(2x) + 2\sin(2x)) + c$$

تمرین: حاصل انتگرال‌های زیر را به روش مستقیم جزء به جزء حل کنید

1) $\int \sin(4x)e^{-3x}\,dx$

2) $\int \cos(4x)e^{2x}\,dx$

3) $\int \sin(2x)e^{5x}\,dx$

ب-روش جدولی: این روش برای حل انتگرال‌هایی که به صورت حاصل‌ضرب یک تابع چندجمله‌ای در یک تابع مثلثاتی یا نمایی ($\left\{\begin{array}{l} e^{ax} \\ \sin(ax) \\ \cos(ax) \end{array}\right.$ ×چندجمله‌ای) و یا حاصل‌ضرب دو تابع مثلثاتی و نمایی ($e^{ax}\times\left\{\begin{array}{l} \sin(bx) \\ \cos(bx) \end{array}\right.$) به کار می‌رود. در این دو حالت استفاده از روش جدولی بسیار آسان‌تر بوده و سریع‌تر به جواب می‌رسید.

حالت اول-با حضور چندجمله‌ای: ابتدا جدولی با دو ستون رسم کرده و در بالای ستون سمت چپ عبارت مشتق و در بالای ستون سمت راست عبارت انتگرال را می‌نویسیم:

مشتق	انتگرال

سپس زیر مشتق، چندجمله‌ای را نوشته و تا زمانی که به صفر برسد از آن مشتق می‌گیریم و مشتق‌ها را زیر هم می‌نویسیم:

به طور مثال

انتگرال	مشتق
	x^2+3x
	$2x+3$
	2
	0

سپس تابع دوم را زیر انتگرال نوشته و تا زمانی که به روبروی صفر برسد از آن انتگرال می‌گیریم:

به طور مثال:

مشتق	انتگرال
x^2+3x	$\cos 2x$
$2x+3$	$\frac{1}{2}\sin 2x$
2	$-\frac{1}{4}\cos 2x$
0	$-\frac{1}{8}\sin 2x$

عبارات زیر ستون مشتق را در عبارت سطر بعدی ضرب کرده و یک‌درمیان در + و − ضرب می‌کنیم:

مشتق		انتگرال
x^2+3x		$\cos 2x$
	$+$	
$2x+3$		$\frac{1}{2}\sin 2x$
	$-$	
2		$-\frac{1}{4}\cos 2x$
	$+$	
0		$-\frac{1}{8}\sin 2x$

عبارات به دست آمده را با هم جمع کرده و به جواب نهایی انتگرال می‌رسیم:

$$\int (x^2+3x)\cos 2x\,dx = +(x^2+3x)(\frac{1}{2}\sin 2x)-(2x+3)(-\frac{1}{4}\cos 2x)+2(-\frac{1}{8}\sin 2x)+c=$$

$$\frac{1}{4}(2x^2+6x-1)\sin(2x)+(2x+3)\cos(2x)+c$$

حالت دوم- حا صل ضرب دو تابع مثلثاتی و نمایی: م شابه حالت اول جدول را ت شکیل می‌دهیم و در این حالت مهم نیست کدام تابع (مثلثاتی یا نمایی) را در ستون مشتق بنویسیم. هر کدام را که نوشتیم (با توجه به اینکه هیچگاه مشتق آن صفر نخواهد شد) فقط دو بار از آن مشتق می‌گیریم و از تابع دیگر در ستون مقابل نیز دو بار انتگرال می‌گیریم و عبارات ستون م شتق را م شابه حالت قبل در عبارت سطر بعدی انتگرال با علامات مثبت و منفی (یک در میان) ضرب می‌کنیم و در نهایت عبارت آخر هر دو ستون را با علامت مثبت در همدیگر ضرب کرده و انتگرال می‌گیریم. این انتگرال ضریبی از انتگرال ا صلی بوده و با بردن آن به سمت دیگر، جواب را می‌توان به سادگی یافت. به طور مثال:

مشتق		انتگرال
e^{3x}	+	$\cos 2x$
$3e^{3x}$	−	$\frac{1}{2}\sin 2x$
$9e^{3x}$	+	$-\frac{1}{4}\cos 2x$

در نهایت داریم:

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx = +e^{3x}(\frac{1}{2}\sin 2x) - (3e^{3x})(-\frac{1}{4}\cos 2x) + \int 9e^{3x}(-\frac{1}{4}\cos 2x)dx + c$$

$$\Rightarrow \frac{13}{4}\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x + c$$

$$\Rightarrow \int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{2}{13}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{13}e^{3x}\cos 2x + c_1$$

تمرین: حاصل انتگرال‌های زیر را به روش جدولی حل کنید

1) $\int 2xe^{-5x}\,dx$

2) $\int (4x^3 + x^2 - 7x + 3)e^{-4x}\,dx$

3) $\int \sin(3x)e^{x}\,dx$

4) $\int \cos(3x)e^{-4x}\,dx$

5) $\int \sin(x)e^{-3x}\,dx$

6) $\int \cos\left(\sqrt[3]{2x+3}\right)dx$ (راهنمایی: ابتدا از تغییر متغیر $2x+3=t^3$ استفاده کنید)