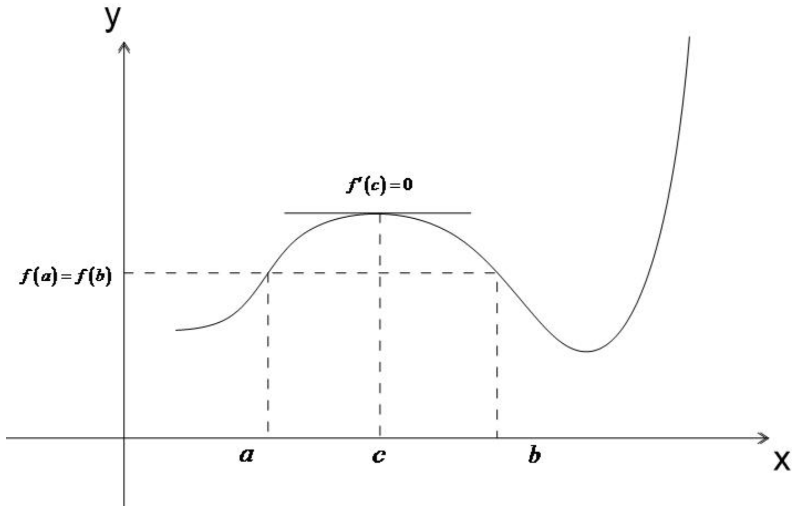
قضیه رول:

هرگاه تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)$ آنگاه حتماً حداقل یک نقطه مانند c وجود دارد که: $f'(c)=0$



مثال: معادله $xe^x-1=0$ در بازه $[0,1]$ چند ریشه دارد؟

حل: تابع $f(x)=xe^x-1$ در بازه $[0,1]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و :

$$f(0)=-1<0$$
$$f(1)=e-1>0$$

پس طبق قضیه بولتزانو (فصل حد و پیوستگی) حداقل یک c وجود دارد که $f(c)=0$

مشتق تابع به صورت زیر است:

$$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow x=-1$$

پس مشتق تابع در بازه $[0,1]$ ریشه ندارد در نتیجه طبق قضیه رول معادله $f(x)=0$ نمی‌تواند ۲ ریشه داشته باشد، زیرا اگر ۲ ریشه داشت باید $f'(x)$ حداقل یک ریشه در این بازه داشت که ندارد، پس حداکثر یک ریشه دارد و با توجه به اینکه ثابت کردیم حداقل یک ریشه دارد پس میتوان نتیجه گرفت دقیقاً یک ریشه دارد.

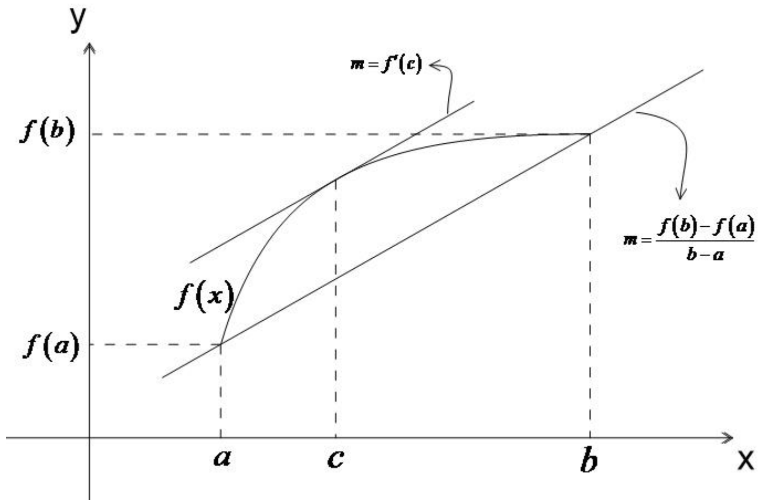
تمرین: مقدار c مربوط به قضیه رول را برای تابع $f(x)=x^4+4x^2+1$ بر بازه $[-2,2]$ بیابید.

قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ):

هرگاه تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه حداقل یک c در این بازه وجود دارد که:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

شکل زیر این موضوع را به خوبی نمایش می‌دهد:



یعنی حداقل یک نقطه وجود دارد که شیب خط مماس بر تابع در آن نقطه (یعنی مشتق تابع در آن نقطه) با شیب خط گذرنده از ابتدا و انتهای بازه برابر است.

مثال: مقدار c مربوط به قضیه لاگرانژ را در بازه $[1,3]$ برای تابع $f(x)=x^2-3x+1$ بیابید.

حل:

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(3^2-3\times3+1)-(1^2-3\times1+1)}{2}=\frac{1-(-1)}{2}=1$$

$$f'(x)=2x-3\Rightarrow f'(c)=2c-3=1\Rightarrow c=2$$

تمرین: به کمک قضیه لاگرانژ ثابت کنید $\forall x>0:\quad \frac{x}{1+x^2}<\text{Arctan}\, x<x$

قضیه کوشی:

هرگاه تابع $f(x)$ و $g(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $g'(x)$ در این بازه ناصفر باشد، آنگاه حداقل یک c در این بازه وجود دارد که:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

مثال: مقدار c مربوط به قضیه کوشی را در بازه $[0,\pi]$ برای توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ بیابید.

حل: دو تابع در شرایط قضیه کوشی صدق می‌کنند پس داریم:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\Rightarrow\frac{\cos c}{-\sin c}=\frac{\sin\pi-\sin 0}{\cos\pi-\cos 0}\Rightarrow-\frac{\cos c}{\sin c}=\frac{0}{-2}=0$$

$$\Rightarrow\cos c=0\Rightarrow c=\frac{\pi}{2}$$

تمرین: مقدار c مربوط به قضیه کوشی را در بازه $[0,2]$ برای توابع $f(x)=x^2-2x+1$ و $g(x)=-3x^2+4x-1$ بیابید.