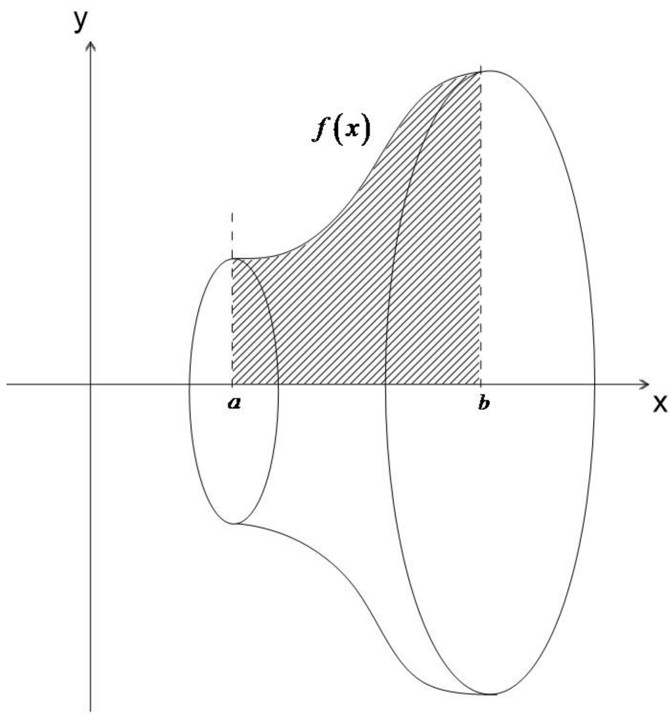
محاسبه حجم به کمک انتگرال:

دوران حول محور xها: اگر مساحت زیر منحنی تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ را حول محور xها دوران دهیم، حجم بدست آمده از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

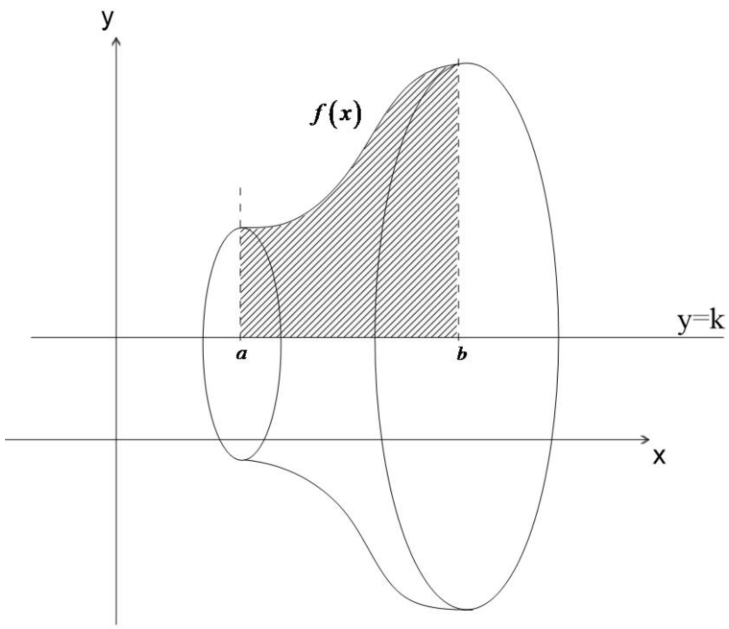


به همین ترتیب اگر مساحت بین دو منحنی $f(x)$ و $g(x)$ را در بازه $[a,b]$ را حول محور xها دوران دهیم، حجم بدست آمده از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$V_x = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x) \right) dx$$

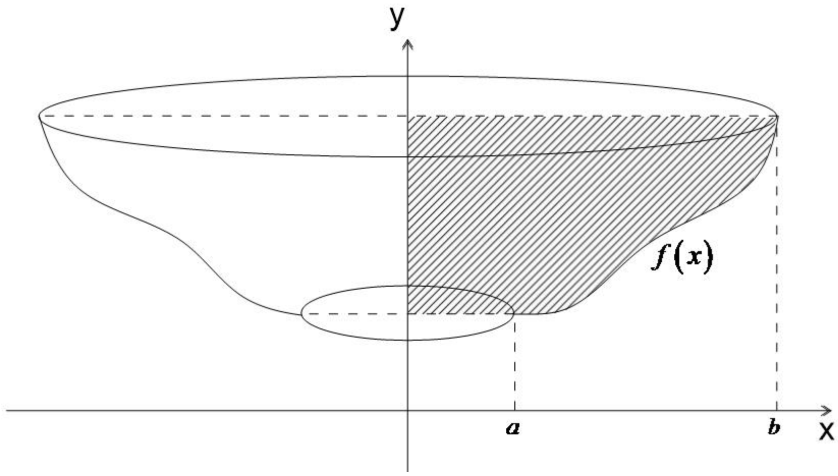
دوران حول خط $y=k$: اگر مساحت زیر منحنی تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ را حول خط $y=k$ دوران دهیم، حجم بدست آمده از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$V_{y=k}=\pi\int_a^b\left[f(x)-k\right]^2dx$$



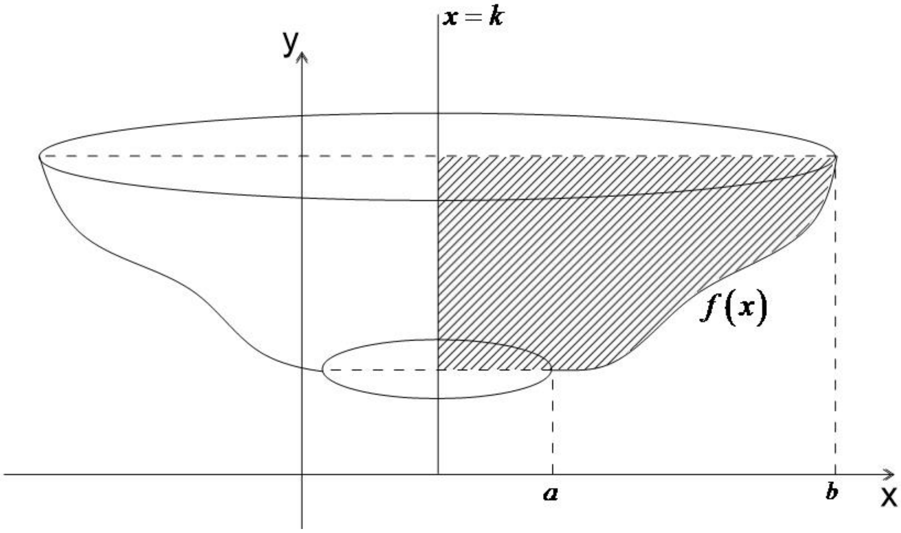
دوران حول محور yها: اگر مساحت ناحیه بین منحنی تابع $f(x)$ و محور yها در بازه $[a,b]$ را حول محور yها دوران دهیم، برای محاسبه حجم بدست آمده باید ابتدا x را بر حسب y بدست آورده ($x=f^{-1}(y)$) و سپس از رابطه زیر حجم را محاسبه کنیم:

$$V_y=\pi\int_a^b x^2dy$$



دوران حول خط $x=k$: اگر مساحت ناحیه بین منحنی تابع $f(x)$ و خط $x=k$ در بازه $[a,b]$ را حول خط $x=k$ دوران دهیم، حجم بدست آمده از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$V_{x=k}=\pi\int_a^b (x-k)^2\,dy$$



مثال: حجم حاصل از دوران $y=x^2$ در بازه $[0,1]$ را حول محورهای زیر بیابید:

الف) محور xها ب) محور yها ج) خط $y=-1$ د) خط $x=-2$

حل:

الف)

$$V_x=\pi\int_0^1 x^4dx=\pi\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1=\pi\left(\frac{1}{5}-0\right)=\frac{\pi}{5}$$

ب)

$$y=x^2\Rightarrow x=\sqrt{y}\quad,\quad\begin{cases}x=0\Rightarrow y=0\\ x=1\Rightarrow y=1\end{cases}$$

$$V_y=\pi\int_{y=0}^1 x^2dy=\pi\int_{y=0}^1 ydy=\pi\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

ج)

$$V_{y=-1}=\pi\int_0^1\left[x^2-(-1)\right]^2dx=\pi\int_0^1\left[x^2+1\right]^2dx=\pi\int_0^1\left(x^4+2x^2+1\right)dx=\pi\left.\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2}{3}x^3+x\right)\right|_0^1=\frac{28}{15}\pi$$

د)

$$V_{x=-2}=\pi\int_0^1\left(x-(-2)\right)^2dy=\pi\int_0^1\left(\sqrt{y}+2\right)^2dy=\pi\int_0^1\left(y+4y^{\frac{1}{2}}+4\right)dy=\pi\left.\left(\frac{y^2}{2}+4\times\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+4y\right)\right|_0^1$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{8}{3}+4\right)=\frac{43}{6}\pi$$