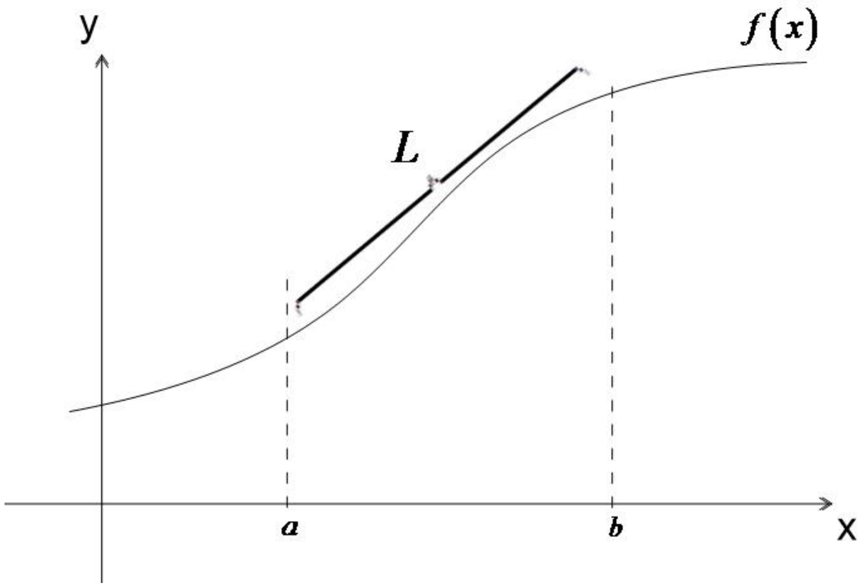
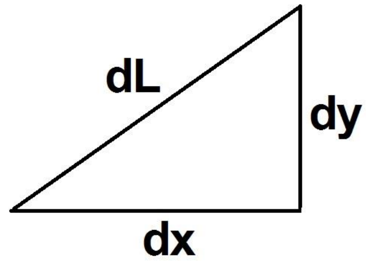
محاسبه طول قوس یک منحنی:

تاکنون از انتگرال معین عمدتاً برای محاسبه مساحت زیر نمودار استفاده کرده‌ایم. ولی انتگرال معین برای محاسبه طول قوس توابع نیز کاربرد دارد. یعنی به جای محاسبه مساحت زیر منحنی تابع، طول قوس خود منحنی را حساب کنیم. جهت محاسبه طول قوس منحنی $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$



زیرا اگر یک المان‌طول منحنی (طول بسیار کوچکی از قوس منحنی) را به صورت زیر فرض کنیم:



آنگاه داریم:

$$dL=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}=\sqrt{dx^2\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}=\sqrt{dx^2\left(1+y'^2\right)}=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

پس طول کل منحنی که انتگرال (مجموع) طول همه المان‌ها است برابر می‌شود با:

$$L=\int dL=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

مثال: محیط دایره‌ای به شعاع ۳ را به کمک انتگرال معین محاسبه کنید.

حل: معادله دایره به شعاع ۳ عبارت است از $x^2+y^2=9$ که برای نیم‌دایره بالایی داریم:

$$y=\sqrt{9-x^2}\qquad -3\le x\le 3$$

که مشتق آن برابر است با:

$$y'=\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{9-x^2}}=\sqrt{\frac{9-x^2+x^2}{9-x^2}}=\sqrt{\frac{9}{9-x^2}}=\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}$$

محیط دایره برابر است با ۲ برابر طول قوس نیم‌دایره بالایی:

$$L=2\int_{-3}^{3}\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=6\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{x}{3}\Big|_{-3}^{3}=6\left(\mathrm{Arcsin}\,1-\mathrm{Arcsin}\left(-1\right)\right)=6\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=6\pi$$

تمرین: طول قوس منحنی تابع $f(x)=Ln(\cos x)$ در بازه $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ را محاسبه کنید.