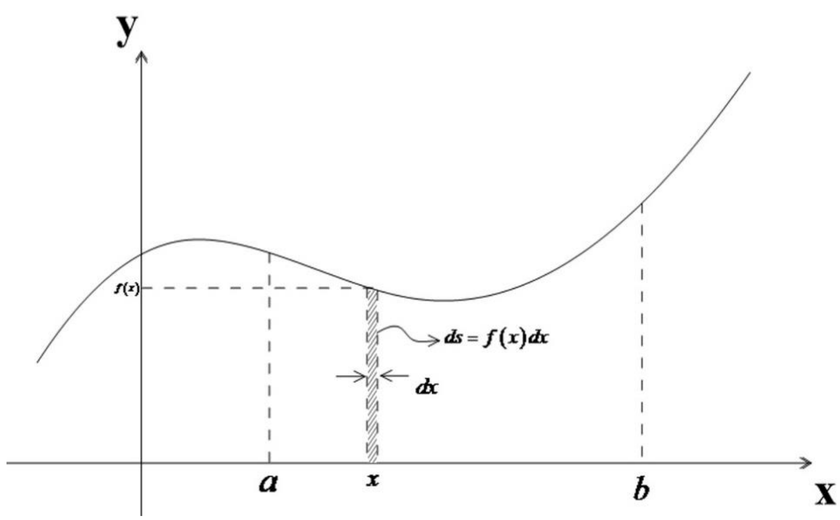
محاسبه مساحت زیر منحنی به کمک انتگرال:

از ابتدای فصل به یاد داریم که مفهوم انتگرال، محاسبه مساحت زیر منحنی است. یعنی هرگاه از تابع داده شده در بازه داده شده انتگرال معین بگیریم، مساحت زیر منحنی آن تابع در آن بازه به دست می‌آید. مفهوم انتگرال جهت محاسبه مساحت زیر منحنی به کمک شکل زیر نشان داده می‌شود:

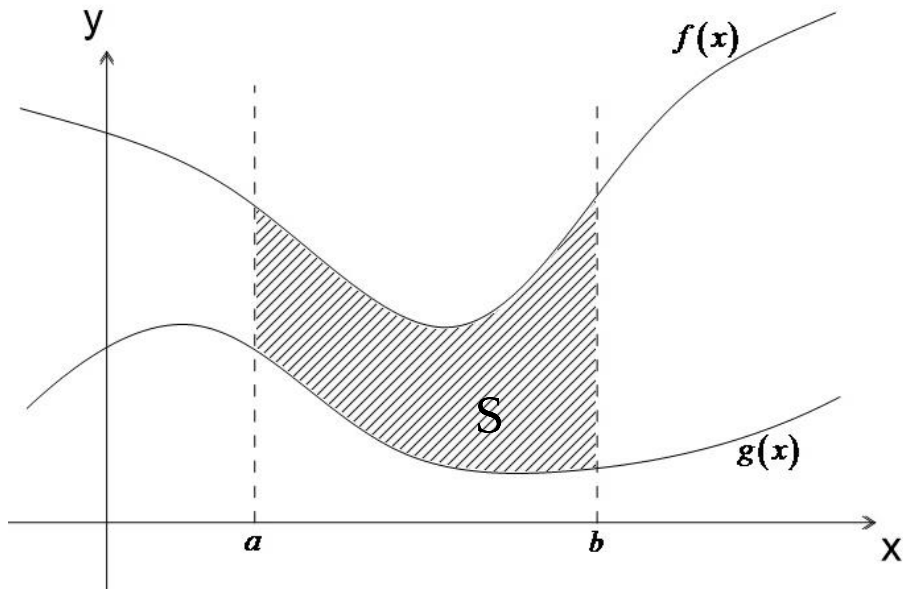


محاسبه مساحت زیر منحنی از رابطه $S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ امکان‌پذیر است. قرار دادن قدرمطلق به جهت آن است که اگر منحنی (یا بیشتر قسمت‌های منحنی) در زیر محور x باشند جواب نهایی انتگرال منفی می‌شود ولی مساحت یک عبارت مثبت است. پس به کمک قدرمطلق می‌توانیم مقدار مساحت را صرفنظر از مثبت یا منفی بودن جواب انتگرال بیابیم.

حال اگر مساحت بین دو منحنی را بخواهیم به دست آوریم کافیست از حاصل تفریق آن دو تابع در بازه‌هایی که علامت حاصل تفریق دو تابع تغییر نمی‌کند ($f(x)-g(x)$ یا همواره مثبت یا همواره منفی باشد) انتگرال بگیریم.

به طور مثال، مساحت سطح محصور به دو منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در بازه $[a,b]$ برابر است با:

$$S=\left|\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right|$$



حال اگر $f(x)-g(x)$ در بازه‌های مختلف علامت‌های مختلف داشته باشند باید حتماً در آن بازه‌های کوچکتر به صورت جداگانه $S=\left|\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right|$ را محاسبه کرده و در نهایت اعداد مثبت را با یکدیگر جمع کنیم. پس اگر دو شکل در بیش از ۲ نقطه همدیگر

را قطع کنند باید مساحت هر بازه را جداگانه محاسبه و سپس نتایج مثبت را با هم جمع کنیم.

مثال: مساحت ناحیه محصور به دو منحنی $y=x^2+3$ و $y=4x$ را بیابید.

حل: ابتدا دو منحنی را با هم مساوی قرار می‌دهیم تا نقاط تلاقی دو منحنی که بازه انتگرال‌گیری را تشکیل می‌دهند را بیابیم. سپس از فرمول بالا، مساحت بین دو منحنی را می‌یابیم:

$$x^2+3=4x \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

$$S=\left|\int_1^3 \left(x^2+3-4x\right)dx\right|=\left|\frac{x^3}{3}+3x-2x^2\right|_1^3=\left|(9+9-18)-\left(\frac{1}{3}+3-2\right)\right|=\left|-\frac{4}{3}\right|=\frac{4}{3}$$

تمرین: مساحت ناحیه محصور به دو منحنی $y=x^2-4$ و $y=4-x^2$ را بیابید.