مشتق توابع انتگرالی:

هرگاه بخواهیم از تابعی شامل انتگرال، مشتق بگیریم باید از قاعده زیر استفاده کنیم که مستقیماً فرمول محاسبه مشتق انتگرال را به ما می‌دهد. مشتق انتگرال $\int_{n(x)}^{m(x)} h(t)dt$ برابر است با:

$$\left(\int_{n(x)}^{m(x)} h(t)dt\right)' = m'(x).h(m(x)) - n'(x).h(n(x))$$

یعنی مشتق تابعی که شامل انتگرالی با یک تابع تک‌متغیره مانند $h(t)$ و کران‌هایی بر حسب x مانند $m(x)$ (کران بالا) و $n(x)$ (کران پایین) باشد برابر است با مشتق کران بالا ضربدر تابع داخل انتگرال که کران بالا به جای متغیر آن جایگزین شده است منهای مشتق کران پایین ضربدر تابع داخل انتگرال که کران پایین به جای متغیر آن جایگزین شده باشد.

مثال: مشتق انتگرال $f(x) = \int_{Ln(x)}^{x^3+2x} \frac{2t}{3-t}dt$ را بیابید.

حل:

$$f(x) = \int_{Ln(x)}^{x^3+2x} \frac{2t}{3-t}dt$$

$$\Rightarrow f'(x) = (3x^2+2).\frac{2(x^3+2x)}{3-(x^3+2x)} - \frac{1}{x}.\frac{2Ln(x)}{3-Ln(x)}$$

در حالت کلی‌تر، اگر تابع زیر انتگرال دومتغیره (مثلاً بر حسب t و x) باشد فرمول مشتق انتگرال چنین توابعی یک ترم اضافه خواهد داشت. زیرا می‌توان از تابع زیر انتگرال هم بر حسب x مشتق گرفت.

مشتق انتگرال $\int_{n(x)}^{m(x)} h(x,t)dt$ برابر است با:

$$\left(\int_{n(x)}^{m(x)} h(x,t)dt\right)' = m'(x).h(x,m(x)) - n'(x).h(x,n(x)) + \int_{n(x)}^{m(x)} \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}dt$$

در این رابطه، h تابعی دو متغیره بر حسب x و t بوده و $\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}$ یعنی مشتق h بر حسب x وقتی t را عدد ثابت فرض کنیم.

مثال: مشتق انتگرال $f(x) = \int_{x^2}^{\sin x} e^{xt}dt$ را بیابید.

حل:

$$f(x) = \int_{x^2}^{\sin x} e^{xt}dt$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x.e^{x\sin x} - 2x.e^{x^3} + \int_{x^2}^{\sin x} te^{xt}dt$$

تمرین: مشتق توابع زیر را بیابید.

1. $f(x) = \int_{\cos x}^{x} \frac{\sin x}{x-1}dt$
2. $f(x) = \int_{5x}^{e^{3x}} Ln(x^2+t)dt$
3. $f(x) = \int_{2}^{x^2} \sec\left(t^2x^3\right)dt$