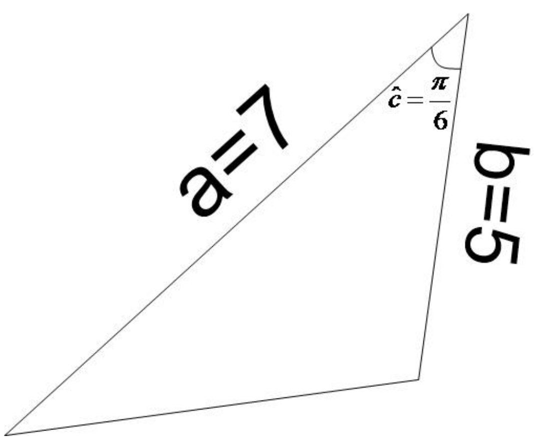
نسبت‌های وابسته:

در سوالات مربوط به نسبت‌های وابسته باید از معادله نسبت به پارامتر مربوطه (معمولا زمان) مشتق بگیریم. برخی مواقع نیاز هست از مشتق زنجیره‌ای برای یافتن مشتق یک عبارت نسبت به زمان استفاده کنیم. حتی اگر دو یا چند متغیر مختلف نسبت به زمان تغییر کنند باید از متغیر وابسته نسبت به زمان مشتق بگیریم و جواب را بیابیم. اصولاً تغییرات هر پارامتر نسبت به زمان را سرعت تغییرات آن پارامتر می‌نامیم. به کمک مثال‌های زیر، نسبت‌های وابسته را بیشتر توضیح می‌دهیم.

مثال: دو ضلع مثلثی دارای طولهای ۷ و ۵ متر می‌باشند و زاویه بین آنها ۳۰ درجه است. اگر ضلع اول با نرخ ۱ متر بر ثانیه افزایش، ضلع دوم با نرخ ۲ متر بر ثانیه کاهش و زاویه بین آنها با نرخ ۱ رادیان بر ثانیه کاهش یابد، سرعت تغییرات مساحت مثلث را بیابید.

حل: میدانیم مساحت مثلث از رابطه $S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{c}$ بدست می‌آید. زاویه ها را باید برحسب رادیان جایگذاری کنیم:



$$a=7\ ,\quad \frac{da}{dt}=1\ ,\quad b=5\ ,\quad \frac{db}{dt}=-2\ ,\quad \hat{c}=\frac{\pi}{6}\ ,\quad \frac{d\hat{c}}{dt}=-1$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{c}\Rightarrow\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{da}{dt}b\sin\hat{c}+a\frac{db}{dt}\sin\hat{c}+ab\frac{d\hat{c}}{dt}\cos\hat{c}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\left(1\times5\times\sin\frac{\pi}{6}+7\times(-2)\times\sin\frac{\pi}{6}+7\times5\times(-1)\times\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{dS}{dt}=-\frac{9+35\sqrt{3}}{4}\simeq-17.4$$

ملاحظه می‌کنید که در این مثال، متغیر موردنظر ما بر حسب سه پارامتر است که با مشتق‌گیری نسبت به زمان و به کمک مشتق زنجیره‌ای سرعت تغییرات متغیر را یافتیم.

مثال: اگر متحرکی روی مسیر $3x^3+4y^3=xy$ حرکت کند و در نقطه $(1,2)$ سرعت این متغیر در راستای محور yها برابر با ۵ متر بر ثانیه باشد، سرعت متغیر را در راستای محور xها بیابید.

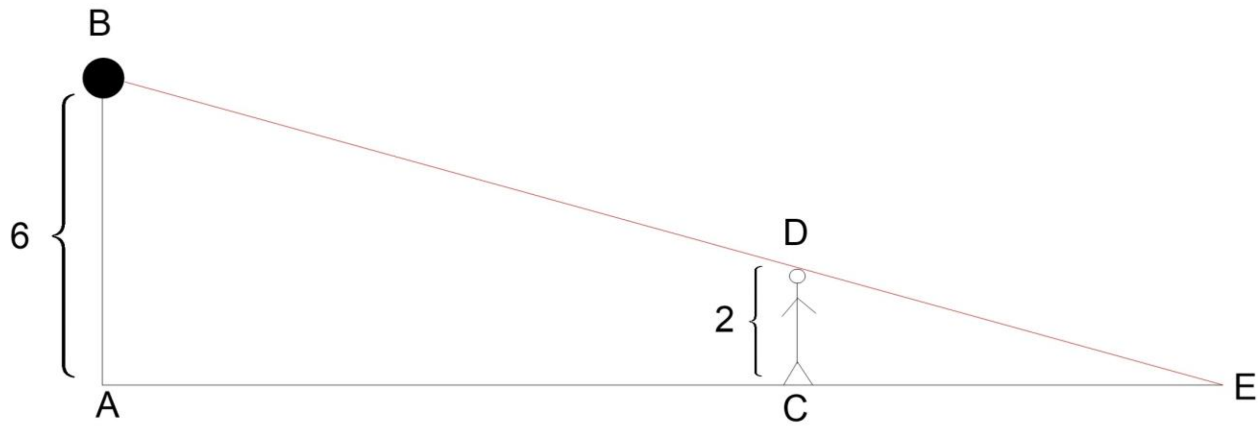
حل: به کمک مشتق‌گیری زنجیره‌ای از عبارت مشتق می‌گیریم و مقادیر داده شده را جایگذاری می‌کنیم:

$$3x^3+4y^3=xy\Rightarrow9x^2\frac{dx}{dt}+12y^2\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}y+x\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=5,x=1,y=2\Rightarrow9\times1\times\frac{dx}{dt}+12\times2^2\times5=\frac{dx}{dt}\times2+1\times5$$

$$\Rightarrow7\frac{dx}{dt}=5-240\Rightarrow\boxed{\frac{dx}{dt}=-\frac{235}{7}}$$

مثال: یک چراغ در ارتفاع ۶ متری زمین نصب شده است. فردی که ۲ متر قد دارد با سرعت ۲ متر بر ثانیه به سمت تیر حامل چراغ حرکت می‌کند. سرعت نوک سایه این فرد را بیابید.



حل: سرعت نوک سایه فرد در شکل بالا عبارت است از $\frac{d(AE)}{dt}$. به کمک قضیه تالس داریم:

$$\frac{CD}{AB}=\frac{CE}{AE}\Rightarrow AE=\frac{AB}{CD}CE$$

طول‌های AB و CD ثابت هستند (ارتفاع لامپ و قد فرد) پس داریم:

$$AE=\frac{6}{2}CE=3CE$$

حال از طرفین نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d(AE)}{dt}=3\frac{d(CE)}{dt}\Rightarrow\frac{d(CE)}{dt}=\frac{1}{3}\frac{d(AE)}{dt}$$

همچنین داریم:

$$AE = AC + CE \Rightarrow \frac{d(AE)}{dt} = \frac{d(AC)}{dt} + \frac{d(CE)}{dt} \Rightarrow \frac{d(AE)}{dt} = 2 + \frac{d(CE)}{dt}$$
$$\Rightarrow \frac{d(AE)}{dt} = 2 + \frac{1}{3}\frac{d(AE)}{dt} \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{d(AE)}{dt} = 2$$
$$\Rightarrow \frac{d(AE)}{dt} = 3$$

پس نوک سایه فرد با سرعت ۳ متر بر ثانیه در حال حرکت است.

تمرین: آب با نرخ حجمی π مترمکعب بر ثانیه وارد مخزن مخروطی وارونه‌ای به ارتفاع ۱۰ متر و شعاع قاعده ۳ متر می‌شود. سرعت افزایش ارتفاع آب در مخزن وقتی ارتفاع آب ۵ متر باشد بیابید.