یافتن جواب سری‌ها به کمک انتگرال:

هرگاه بخواهیم مجموع بی‌نهایت جمله مشابه را به کمک انتگرال حساب کنیم کافیست ابتدا آن حد مجموع را به یک سری با شمارنده‌ای مانند i از ۱ تا n که $n\to\infty$ میل می‌کند تبدیل کنیم، سپس آن سری را طوری مرتب کنیم که تمام iها به همراه nها تشکیل $\frac{i}{n}$ دهند. در این حالت یک $\frac{1}{n}$ اضافه نیز باقی خواهد ماند. جواب این سری برابر است با انتگرال تابع داخل سری به طوری که $\frac{i}{n}$ها به x و $\frac{1}{n}$ به dx تبدیل شده و انتگرال از 0 تا 1 گرفته می‌شود.

مثال: حاصل حد مجموع زیر را به کمک انتگرال‌گیری بیابید.

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$

حل: ابتدا این حد را به شکل زیر به یک سری تبدیل می‌کنیم:

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}$$

سپس این سری را به روش گفته شده به انتگرال تبدیل می‌کنیم:

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}=\int_{x=0}^{1}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\text{Arcsin}\,\frac{x}{2}\Big|_0^1=\text{Arcsin}\,\frac{1}{2}-\text{Arcsin}\,0=\boxed{\frac{\pi}{6}}$$

مثال: حاصل حد مجموع زیر را به کمک انتگرال‌گیری بیابید.

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^3}+\frac{2n}{(n+2)^3}+\dots+\frac{1}{8n}\right)$$

حل: مشابه مثال قبل، ابتدا این حد را به یک سری تبدیل می‌کنیم:

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^3}+\frac{2n}{(n+2)^3}+\dots+\frac{1}{8n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{in}{(n+i)^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{in}{n^3\left(1+\frac{i}{n}\right)^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{\frac{i}{n}}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^3}$$

سپس سری به دست آمده را به انتگرال تبدیل کرده و جواب را محاسبه می‌کنیم:

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{\frac{i}{n}}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^3}=\int_{x=0}^{1}\frac{x}{(1+x)^3}dx=\int_{x=0}^{1}\frac{x+1-1}{(x+1)^3}dx=\int_{x=0}^{1}\left[\frac{x+1}{(x+1)^3}-\frac{1}{(x+1)^3}\right]dx$$

$$=\int_{x=0}^{1}\left[\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}\right]dx=\int_{x=0}^{1}\left[(x+1)^{-2}-(x+1)^{-3}\right]dx=\frac{(x+1)^{-1}}{-1}-\frac{(x+1)^{-2}}{-2}\Bigg|_0^1$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)-\left(-1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$$

تمرین: حاصل حد مجموع‌های زیر را بیابید

1. $A=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\sqrt{\frac{n}{n+9}}+\dots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right)$
2. $B=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin^2\frac{1}{n}+\sin^2\frac{2}{n}+\dots+\sin^2\frac{n}{n}\right)$
3. $C=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$
4. $D=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$